UNITÀ 5

Sistemi di numerazione

- I diversi tipi di sistemi di numerazione
- Cambiamenti di base
- Operazioni aritmetiche nei sistemi non decimali

I diversi tipi di sistemi di numerazione

1 Introduzione

Non sappiamo con certezza quali popoli si servirono, per primi, dei numeri; è certo, tuttavia, che passò molto tempo tra l'uso verbale dei numeri e la loro scrittura.
Molti popoli giunsero quasi contemporaneamente a rappresentare con simboli grafici, in forme diverse, i numeri e a stabilire delle leggi per poter operare con essi.

Nacquero così modi diversi per rappresentare i numeri, anche quelli ai quali non era associato direttamente un simbolo, e per poter eseguire con essi le varie operazioni. Nacquero, cioè, i *sistemi di numerazione*.

- Un **sistema di numerazione** è un insieme di simboli, detti **cifre**, e di regole per combinarli, per mezzo del quale è possibile rappresentare qualunque numero.
- I più antichi sistemi di numerazione furono per lo più **sistemi additivi**, nei quali a ogni simbolo è associato un valore numerico prefissato. Tali sistemi si dicono *additivi* (o *addizionali*) perché il valore del numero rappresentato si ottiene sommando (o sottraendo) i valori numerici dei singoli simboli che costituiscono la scrittura del numero.

  I Romani, per esempio, usavano un sistema additivo.

PREREQUISITI

Per affrontare lo studio di questa unità è sufficiente la conoscenza delle operazioni aritmetiche e delle potenze nell'insieme dei numeri naturali (**UNITÀ 1**).

OBIETTIVI

Conoscenze

- Differenza tra un sistema additivo e un sistema posizionale
- Rappresentazione dei numeri naturali nei sistemi di numerazione posizionali

Abilità

- Trasformare la scrittura di un numero da una base a un'altra
- Operare con numeri in base diversa dalla base 10, calcolando somme, differenze e prodotti

ESEMPIO

Nella numerazione romana si hanno dei simboli fondamentali, che sono

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Per rappresentare gli altri numeri si usano gli stessi simboli con alcuni accorgimenti, come puoi dedurre dalle seguenti scritture:

$\mathrm{II} = 1 + 1$ $\quad$ $\mathrm{III} = 1 + 1 + 1$ $\quad$ $\mathrm{IV} = 5 - 1$ $\quad$ $\mathrm{VI} = 5 + 1$

$\mathrm{IX} = 10 - 1$ $\quad$ $\mathrm{XI} = 10 + 1$ $\quad$ $\mathrm{XL} = 50 - 10$ $\quad$ $\mathrm{LX} = 50 + 10$

$\mathrm{XXXIV} = 10 + 10 + 10 + 5 - 1$ $\quad$ $\mathrm{DCL} = 500 + 100 + 50$

Così, $\mathrm{MCDLXIV} = 1000 + (500 - 100) + 50 + 10 + (5 - 1)$ corrisponde a $1000 + 400 + 50 + 10 + 4 = 1464$.

Il sistema di numerazione romano è dunque un sistema additivo.

Nei sistemi additivi risultava complicato sia rappresentare numeri piuttosto grandi sia eseguire calcoli di un certo impegno.

Furono gli Indiani, forse nel VI sec. d.C., a ideare il sistema di numerazione decimale, di cui ancor oggi ci serviamo, che fu diffuso dagli Arabi e divulgato in Italia verso il 1200 da **Leonardo Pisano**, detto **Fibonacci**, con il suo *Liber Abaci*.

- Il sistema di numerazione decimale, che è quello da noi comunemente usato, è un **sistema posizionale**: in esso il valore numerico associato a ogni cifra varia a seconda della posizione che essa occupa nella scrittura del numero.

2 Sistema decimale

Il nostro sistema di numerazione si serve di dieci simboli, detti *cifre*, che rappresentano i primi dieci numeri naturali. Tutti gli altri numeri naturali si rappresentano mediante una sequenza di tali simboli.

■ Si chiama **ordine di una cifra** il posto che essa occupa in tale sequenza, contando, a partire da zero, dall'ultima cifra a destra verso sinistra.

ESEMPIO

1 Nel numero 5028
- 8 è la cifra di ordine 0 e rappresenta 8 unità;
- 2 è la cifra di ordine 1 e rappresenta 2 decine;
- 0 è la cifra di ordine 2 e rappresenta 0 centinaia;
- 5 è la cifra di ordine 3 e rappresenta 5 migliaia.

5028

cifra di ordine 0 → unità
cifra di ordine 1 → decine → 1 decina = 10 unità
cifra di ordine 2 → centinaia → 1 centinaio = 10 decine
cifra di ordine 3 → migliaia → 1 migliaio = 10 centinaia

Il sistema di numerazione posizionale a base 10, che oggi utilizziamo, fu introdotto per la prima volta nel VI secolo in India. Tale sistema è possibile solo mediante l'adozione di una cifra, il nostro zero, da utilizzare per rappresentare una posizione vuota. Fu così che fu introdotto lo zero, che in precedenza non era considerato un numero. Dalla parola sanscrita **śūnya**, che significa «vuoto», deriva la parola araba **ṣifr**, da cui a sua volta derivano le parole italiane **zero** e **cifra**.

Questo **sistema di numerazione** si chiama **decimale** perché *dieci unità di un ordine formano un'unità dell'ordine immediatamente superiore*. Perciò la cifra di ordine zero indica il numero di unità, la cifra di ordine 1 indica il numero di decine, essendo una decina uguale a dieci unità, la cifra di ordine 2 indica le centinaia, essendo un centinaio uguale a 10 decine, e così via. In altre parole, il valore numerico associato a ogni cifra si ottiene moltiplicando tale cifra per una potenza di 10, il cui esponente è dato dall'ordine della cifra stessa.

ESEMPIO

2 Nel numero 5028
- la cifra 8, di ordine 0, è associata al valore $8 \cdot 10^0 = 8 \cdot 1 = 8$;
- la cifra 2, di ordine 1, è associata al valore $2 \cdot 10^1 = 2 \cdot 10 = 20$;
- la cifra 0, di ordine 2, è associata al valore $0 \cdot 10^2 = 0 \cdot 100 = 0$;
- la cifra 5, di ordine 3, è associata al valore $5 \cdot 10^3 = 5 \cdot 1000 = 5000$.

Perciò il numero 5028 si può scrivere in *forma polinomiale* in questo modo:

$$5028 = 5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

Infatti $$5028 = 5000 + 20 + 8$$

3 Sistemi non decimali

Il sistema di numerazione decimale, cioè a base 10, è stato universalmente adottato per la sua grande praticità: il numero delle cifre è 10, quindi un numero né troppo grande né troppo piccolo. È ovvio però che il problema della numerazione (che poi, in pratica, è quello di contare) potrebbe benissimo essere risolto anche se, invece del 10, si assumesse come base qualsiasi altro numero naturale maggiore o uguale a 2. Si potrebbe, ad esempio, creare un sistema a base 3, nel quale
- le cifre usate per scrivere tutti i numeri sono 0, 1, 2;
- le unità si raggruppano a tre a tre;
- tre unità di un certo ordine formano un'unità dell'ordine immediatamente superiore.

Quindi anche in questo sistema ogni numero può essere espresso in **forma polinomiale**, cioè mediante un polinomio ordinato secondo le potenze decrescenti della base, che nel caso specifico è 3.

Così il numero 1201 scritto in forma abbreviata nel sistema ternario, cioè a base 3, equivale, nel sistema decimale, a $(1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0)$ unità, cioè a $(27 + 18 + 1)$ unità $= 46$ unità.
La base potrebbe anche essere maggiore di 10, per esempio 12 (impiegando le dieci cifre già in uso più due di nuova creazione); ricordiamo che, nella pratica commerciale, le uova e certi generi di mercerie o minuterie metalliche si vendono a *dozzine* e a *grosse* (la grossa è equivalente a 12 dozzine).
È chiaro che una base $b < 10$ offre il vantaggio di usare solo poche cifre e lo svantaggio di scrivere i numeri con molte più cifre dei numeri a base decimale (come vedremo meglio fra poco), mentre l'adozione di una base $b > 10$ presenterebbe, invece, conseguenze perfettamente opposte a quelle dette sopra.
Pertanto nessuno, nel nostro passato, avrebbe pensato all'adozione di sistemi di numerazione a base diversa da quella decimale, universalmente e da tempo (oltre otto secoli) in uso, se non per puro desiderio di cimentarsi in un curioso e forse divertente gioco di virtuosismo aritmetico o per l'unico scopo pratico che se ne conosceva: la *crittografia*.

Il termine **crittografia** (o anche **criptografia**) deriva dal greco, con il significato di «scrittura nascosta», «scritto segreto».

Con l'avvento dei calcolatori elettronici, fu invece utilizzato il sistema di numerazione a base 2 perché il calcolatore riconosce *due* stati fondamentali, che vengono associati alle cifre 0 e 1.

4 Sistemi di numerazione in base *b*

Consideriamo, per esempio, un sistema di numerazione in base 4: in esso, per la scrittura di qualsiasi numero, useremo solo le cifre 0, 1, 2, 3. In un numero di più cifre, ogni cifra, come in tutti i sistemi posizionali, avrà un valore numerico che varia con la sua *posizione*, cioè con il suo *ordine*. Poiché, in tale sistema, le unità sono raggruppate a 4 a 4, alla cifra di ordine n è associato il valore numerico che, scritto nel sistema decimale, è il prodotto della cifra stessa per 4^n.

ESEMPIO

1 Consideriamo il numero naturale che, in base 4, è scritto **132**.

- Alla cifra 2, di ordine 0, è associato il valore numerico che, scritto nel sistema decimale, è $2 \cdot 4^0$:

$$\mathbf{2} \longrightarrow 2 \cdot 4^0 = 2 \cdot 1 = 2$$

- Alla cifra 3, di ordine 1, è associato il valore numerico $3 \cdot 4^1$:

$$\mathbf{3} \longrightarrow 3 \cdot 4^1 = 12$$

- Alla cifra 1, di ordine 2, è associato il valore numerico $1 \cdot 4^2$:

$$\mathbf{1} \longrightarrow 1 \cdot 4^2 = 16$$

Il numero **132** in base 4 corrisponde, nel sistema decimale, a

$$1 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = 16 + 12 + 2 = 30$$

Consideriamo ora un sistema di numerazione in una generica base b: in tale sistema, in un numero con più cifre, il valore numerico di ogni cifra, espresso nel sistema decimale, dovrà essere moltiplicato per un'opportuna potenza di b il cui esponente, detto **ordine** o **posizione** di quella cifra, è uguale al numero delle cifre che seguono, verso destra, quella considerata. Possiamo quindi generalizzare le osservazioni del precedente esempio, relative al numero che nel sistema in base 4 era scritto 132.
Pertanto, se x è un numero naturale espresso in base b e se

$$a_n \quad a_{n-1} \quad ... \quad a_1 \quad a_0$$

sono le cifre della sua rappresentazione in tale base, allora si ha

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

IMPORTANTE

In un sistema di numerazione in base b, il **valore** numerico **associato a una cifra** di ordine k si ottiene moltiplicando la cifra stessa per b^k.

cioè, essendo $b^0 = 1$,

$$\boxed{x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0} \qquad \boxed{1}$$

Abbiamo scritto così il numero x, in base b, nella **forma polinomiale**.

ESEMPI

2 Rappresentiamo in forma decimale il numero che in base 8 si scrive 7512.

Esprimiamo nel sistema decimale i valori numerici associati a ogni cifra:

- la cifra 2 è di ordine 0; il valore numerico a essa corrispondente nel sistema decimale è

$$2 \cdot 8^0 = 2 \cdot 1 = 2$$

- la cifra 1 è di ordine 1; quindi a essa va associato il valore numerico $1 \cdot 8^1 = 8$
- la cifra 5 è di ordine 2; quindi a essa va associato il valore numerico $5 \cdot 8^2 = 320$
- infine la cifra 7 è di ordine 3; perciò a essa va associato il valore numerico $7 \cdot 8^3 = 3584$

Dunque il numero che in base 8 si scrive 7512 corrisponde al numero che in base 10 è dato da

$$2 + 8 + 320 + 3584 = 3914$$

Possiamo schematizzare questo procedimento nel modo seguente:

$$7\ 5\ 1\ 2$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 8^0 &= 2 \\ 1 \cdot 8^1 &= 8 \\ 5 \cdot 8^2 &= 320 \\ 7 \cdot 8^3 &= 3584 \\ \hline & \ 3914 \end{aligned}$$

3 Rappresentiamo nel sistema decimale il numero che in base 5 si scrive 20413.

Dalla $\boxed{1}$ si ha

$$\underbrace{20413}_{\text{in base 5}} = \mathbf{2} \cdot 5^4 + \mathbf{0} \cdot 5^3 + \mathbf{4} \cdot 5^2 + \mathbf{1} \cdot 5^1 + \mathbf{3} \cdot 5^0 = 2 \cdot 625 + 4 \cdot 25 + 5 + 3 = \underbrace{1358}_{\text{in base 10}}$$

5 Notazione in uso

In questa unità sarà inevitabile, da questo punto in poi, trattare con numeri scritti in sistemi di numerazione a basi diverse. Allo scopo di evitare confusione, indicheremo la base in cui è espresso ciascun numero con un indice *sempre espresso nel sistema decimale*. Con tale convenzione i risultati degli esempi **2** e **3** del **PARAGRAFO 4** possono essere così espressi:

$$7512_8 = 3914_{10} \qquad 20413_5 = 1358_{10}$$

IMPORTANTE

È importante notare che il modo in cui siamo abituati a leggere i numeri è fondato sul sistema decimale. Leggendo il numero 7512 diciamo «sette *mila* cinque *cento* dodici». Così facendo, attribuiamo alla cifra 7 il valore numerico $7 \cdot 10^3$ (settemila = sette migliaia) e alla cifra 5 il valore numerico $5 \cdot 10^2$.
Tale abitudine dev'essere perciò abbandonata quando leggiamo numeri scritti in base diversa da 10. Dunque il numero 7512_8 sarà letto «sette-cinque-uno-due» specificando poi «in base otto».

6 I sistemi binario ed esadecimale

I sistemi di numerazione più usati, oltre a quello decimale, sono i sistemi binario ed esadecimale.

- **Sistema di numerazione a base 2 o binario**.
  È un sistema particolarmente importante, perché usato per la rappresentazione dei numeri internamente ai computer.
  Le cifre binarie sono ovviamente due: 0 e 1.

> Il noto termine **bit** è l'abbreviazione di *binary digit* (cifra binaria); esso indica una generica cifra binaria, cioè una cifra del sistema a base 2.
>
> Il termine **byte**, invece, indica un gruppo di otto cifre binarie, cioè otto bit.

- **Sistema a base 16 o esadecimale**.
  In questo sistema, come in ogni altro a base $b > 10$, le dieci cifre usuali non sono più sufficienti. Si ricorre pertanto ad alcune lettere dell'alfabeto.

  Le sedici cifre esadecimali sono

  $$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ \mathrm{D},\ \mathrm{E},\ \mathrm{F}$$

  dove

  $$\begin{array}{lll} \mathrm{A}_{16} = 10_{10} & \mathrm{B}_{16} = 11_{10} & \mathrm{C}_{16} = 12_{10} \\ \mathrm{D}_{16} = 13_{10} & \mathrm{E}_{16} = 14_{10} & \mathrm{F}_{16} = 15_{10} \end{array}$$

  Come vedremo più avanti, il sistema esadecimale può essere usato come «abbreviazione» del sistema binario.

Cambiamenti di base

7 Introduzione

Si chiama **cambiamento di base** o **conversione di base** la trasformazione della rappresentazione di un numero da una base a un'altra.

Poiché la rappresentazione decimale è quella per noi più familiare, illustreremo come sia possibile convertire la rappresentazione di un numero dalla base 10 a una qualsiasi altra e viceversa.

8 Dalla base 10 alla base *b*

Algoritmo delle divisioni successive

Per convertire in base b un numero x, rappresentato in base 10, si procede così:

A si divide x per b; il resto ottenuto costituisce l'ultima cifra a destra del numero x espresso in base b;

B si divide nuovamente per b il quoziente ottenuto; il nuovo resto è la cifra, in base b, immediatamente a sinistra di quella ottenuta precedentemente;

C si ripete l'operazione **B** fino a ottenere un quoziente nullo.

L'ultimo resto è la prima cifra a sinistra nel numero x scritto nella base b.

> Il termine **algoritmo** deriva dal nome del matematico di cultura araba *Mohammed ibn-Musa al-Khuwarizmi*, che visse a Baghdad nel IX secolo d.C.; egli ci tramandò non solo un importante libro di calcolo numerico, ma anche un libro di algebra sulle equazioni di primo e secondo grado che fu basilare per lo sviluppo dell'algebra stessa. Ecco perché la parola algoritmo rappresenta un *procedimento di calcolo*. Esso consiste in una successione finita di operazioni elementari da eseguire una dopo l'altra in un ordine ben preciso e deve avere le seguenti caratteristiche: deve essere *finito* (cioè terminare dopo un numero finito di operazioni), *definito* (ossia essere conciso e non ambiguo), *completo* e deve *raggiungere il risultato* per il quale è stato progettato.

ESEMPI

1 Esprimiamo il numero 26_{10} nel sistema binario.

Applichiamo l'algoritmo delle divisioni successive:

$$\begin{array}{rl|c|}
26 : 2 = 13 & \text{resto} & \mathbf{0} \\
13 : 2 = 6 & \text{resto} & \mathbf{1} \\
6 : 2 = 3 & \text{resto} & \mathbf{0} \\
3 : 2 = 1 & \text{resto} & \mathbf{1} \\
1 : 2 = 0 & \text{resto} & \mathbf{1}
\end{array}\ \uparrow$$

I resti ottenuti costituiscono le diverse cifre del numero scritto in base 2: l'ultimo resto sarà la prima cifra a sinistra, il penultimo resto la seconda e così via, nell'ordine indicato dalla freccia. Pertanto possiamo concludere che

$$26_{10} = 11010_2$$

2 Esprimiamo in base 8 il numero 4327_{10}.

Possiamo disporre il calcolo nel seguente modo:

$$\begin{array}{r|l}
4327 & 8 \\ \hline
\mathbf{7} & 540 \;\big|\; 8 \\
 & \mathbf{4} \;\;\big|\; 67 \;\big|\; 8 \\
 & \quad\;\; \mathbf{3} \;\big|\; 8 \;\big|\; 8 \\
 & \quad\quad\quad \mathbf{0} \;\big|\; 1 \;\big|\; 8 \\
 & \quad\quad\quad\quad \mathbf{1} \;\big|\; 0
\end{array}$$

Ricordando che l'ultimo resto è la prima cifra a sinistra del numero richiesto, possiamo scrivere

$$4327_{10} = 10347_8$$

3 Esprimiamo in base 16 il numero 7512_{10}.

Procediamo con le successive divisioni per 16, operando nel sistema decimale; disporremo il calcolo come nell'esempio **1**:

$$\begin{array}{rl|c|}
7512 : 16 = 469 & \text{resto} & \mathbf{8} \\
469 : 16 = 29 & \text{resto} & \mathbf{5} \\
29 : 16 = 1 & \text{resto} & \mathbf{13} \\
1 : 16 = 0 & \text{resto} & \mathbf{1}
\end{array}\ \uparrow$$

Ricordando (**PARAGRAFO 6**) che

$$13_{10} = D_{16}$$

otteniamo

$$7512_{10} = 1D58_{16}$$

9 Dalla base *b* alla base 10

Un metodo semplice e rapido per compiere questa trasformazione può essere quello di scrivere il numero, noto nella scrittura in base b, nella forma polinomiale e di eseguire poi le operazioni che risultano così indicate; si vedano, a questo proposito, gli esempi già presentati nel **PARAGRAFO 4**. Viene usato, però, anche l'**algoritmo di Hörner** che, come si potrebbe verificare, deriva anch'esso dall'espressione in forma polinomiale del numero dato.

Algoritmo di Hörner

Per convertire in base 10 un numero x, rappresentato in base b, si procede così:

A si moltiplica per b la prima cifra a sinistra di x e si somma il prodotto ottenuto con la seconda cifra;

B si moltiplica il risultato dell'operazione precedente per b e si somma il prodotto con la cifra successiva;

C si ripete l'operazione **B** fino all'ultima cifra a destra.

L'ultimo risultato è il numero richiesto.

ESEMPI

1 Esprimiamo in base 10 il numero 1100101_2.

Incolonniamo dapprima le cifre (come è evidenziato dal tratteggio) e quindi eseguiamo i calcoli descritti dall'algoritmo di Hörner:

$$\begin{array}{r|c|l}
 & 1 & =1 \\
1\cdot 2+ & 1 & =3 \\
3\cdot 2+ & 0 & =6 \\
6\cdot 2+ & 0 & =12 \\
12\cdot 2+ & 1 & =25 \\
25\cdot 2+ & 0 & =50 \\
50\cdot 2+ & 1 & =101
\end{array}$$

Dunque $1100101_2 = 101_{10}$.

2 Esprimiamo in base 10 il numero $B7A5_{16}$.

- Procediamo come nell'esempio precedente, sostituendo alle cifre B e A il loro valore decimale (ricordiamo che $B_{16} = 11_{10}$ e $A_{16} = 10_{10}$).

$$\begin{array}{r|r|l}
 & 11 & =11 \\
11\cdot 16+ & 7 & =183 \\
183\cdot 16+ & 10 & =2938 \\
2938\cdot 16+ & 5 & =47013
\end{array}$$

Dunque $B7A5_{16} = 47013_{10}$.

- Il calcolo si poteva anche disporre nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
B7A5 &= ((11\cdot 16+7)\cdot 16+10)\cdot 16+5= \\
&= ((176+7)\cdot 16+10)\cdot 16+5= \\
&= (183\cdot 16+10)\cdot 16+5= \\
&= 2938\cdot 16+5= \\
&= 47013
\end{aligned}$$

10 Dalla base b_1 alla base b_2

È quasi sempre consigliabile operare in due tempi. Prima si effettua la conversione dalla base b_1 alla base 10, poi si opera la conversione dalla base 10 alla base b_2.

ESEMPIO

Esprimiamo in base 7 il numero 43112_5.

Determiniamo dapprima la rappresentazione decimale di 43112_5:

$$43112_5 = (((4\cdot 5+3)\cdot 5+1)\cdot 5+1)\cdot 5+2 = 2907_{10}$$

Operiamo quindi la conversione di 2907_{10} in base 7:

$$\begin{array}{rlr|c|}
2907:7= & 415 & \text{resto} & 2 \\
415:7= & 59 & \text{resto} & 2 \\
59:7= & 8 & \text{resto} & 3 \\
8:7= & 1 & \text{resto} & 1 \\
1:7= & 0 & \text{resto} & 1
\end{array}$$

Dunque $\quad 43112_5 = 2907_{10} = 11322_7 \longrightarrow 43112_5 = 11322_7$

11 Particolari cambiamenti di base

La conversione di un numero dalla base 2 alla base 16 o viceversa si può eseguire in modo molto rapido.

Dal sistema binario al sistema esadecimale

Consideriamo, ad esempio, il numero 1110101011_2, che vogliamo esprimere in base 16. Raggruppiamo le cifre a quattro a quattro, partendo da destra:

$$\underbrace{11}\quad\underbrace{1010}\quad\underbrace{1011}$$

Consideriamo separatamente ciascun gruppo: il valore numerico nel sistema decimale a essi associato è:

$$\begin{aligned}
\mathbf{11} \quad &\longrightarrow \quad 1\cdot 2^9+1\cdot 2^8 = 1\cdot 2^8\cdot 2^1+1\cdot 2^8=(1\cdot 2+1)\cdot 2^8 = 11_2\cdot(2^4)^2 = 3\cdot 16^2\\
\mathbf{1010} \quad &\longrightarrow \quad 1\cdot 2^7+0\cdot 2^6+1\cdot 2^5+0\cdot 2^4 = 1\cdot 2^4\cdot 2^3+0\cdot 2^4\cdot 2^2+1\cdot 2^4\cdot 2+0\cdot 2^4 =\\
& \quad =(1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0\cdot 2^0)\cdot 2^4 = 1010_2\cdot 16^1 = 10\cdot 16^1\\
\mathbf{1011} \quad &\longrightarrow \quad 1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0 =\\
& \quad =(1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0)\cdot 1 = 1011_2\cdot 16^0 = 11\cdot 16^0
\end{aligned}$$

Dunque si ha

$$1110101011_2 = 11_2\cdot 16^2+1010_2\cdot 16^1+1011_2\cdot 16^0 = 3\cdot 16^2+10\cdot 16^1+11\cdot 16^0 = 3AB_{16}$$

In pratica abbiamo sostituito, a ogni gruppo di quattro cifre binarie, la cifra esadecimale che rappresenta lo stesso numero.

Quindi, per passare *dal sistema binario a quello esadecimale*, si può applicare la seguente regola.

Regola Per convertire in base 16 un numero x rappresentato in base 2, si raggruppano a quattro a quattro le cifre binarie di x a partire da destra; se le cifre del gruppo più a sinistra sono tre, due o una, si completa tale gruppo scrivendo uno, due o tre zeri alla sua sinistra. Infine a ogni gruppo di quattro cifre binarie si sostituisce la cifra esadecimale corrispondente (TABELLA 1).

ESEMPIO

1 Esprimiamo il numero 11010101101101_2 nel sistema esadecimale.

Raggruppiamo le cifre binarie a quattro a quattro, a partire da destra:

11 0101 0110 1101

Le cifre del gruppo più a sinistra sono due. Completiamo tale gruppo con due zeri posti a sinistra:

$$\underbrace{0011}\ \underbrace{0101}\ \underbrace{0110}\ \underbrace{1101}$$

Sostituiamo infine, a ogni gruppo di quattro cifre binarie, la corrispondente cifra esadecimale, data dalla TABELLA 1:

$$\boxed{0011}\to 3 \qquad \boxed{0101}\to 5 \qquad \boxed{0110}\to 6 \qquad \boxed{1101}\to D$$

Si ha perciò:

$$11010101101101_2 = 356D_{16}$$

TABELLA 1

corrispondenza tra cifre esadecimali e quaterne di cifre binarie	
cifre esadecimali	cifre binarie
0	0 0 0 0
1	0 0 0 1
2	0 0 1 0
3	0 0 1 1
4	0 1 0 0
5	0 1 0 1
6	0 1 1 0
7	0 1 1 1
8	1 0 0 0
9	1 0 0 1
A	1 0 1 0
B	1 0 1 1
C	1 1 0 0
D	1 1 0 1
E	1 1 1 0
F	1 1 1 1

Dal sistema esadecimale al sistema binario

Regola Per convertire in base 2 un numero x rappresentato in base 16, si sostituisce, a ogni cifra esadecimale di x, il corrispondente gruppo di quattro cifre binarie (**TABELLA 1**); si sopprimono quindi gli eventuali zeri iniziali del primo gruppo a sinistra.

ESEMPIO

2 Rappresentiamo, nel sistema binario, il numero $2FA_{16}$.

Sostituiamo, a ogni cifra esadecimale, il corrispondente gruppo di quattro cifre binarie dato dalla **TABELLA 1**:

$$\begin{array}{ccc} 2 & F & A \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \boxed{0010} & \boxed{1111} & \boxed{1010} \end{array}$$

Quindi, sopprimendo i due zeri iniziali, si ha:

$$2FA_{16} = 1011111010_2$$

OSSERVAZIONE

La scrittura dei numeri in base 16, per quanto visto in questo paragrafo, può essere considerata come un'«abbreviazione» della rappresentazione binaria.
La base 16 viene perciò utilizzata, allo scopo di risparmiare spazio e di migliorare la leggibilità, per riprodurre contenuti di aree di memoria dei computer, istruzioni, codici ecc. la cui forma originaria è binaria.

Operazioni aritmetiche nei sistemi non decimali

12 Tabelle per somma e prodotto

Le usuali operazioni aritmetiche si possono eseguire con numeri rappresentati in una qualsiasi base b, utilizzando le regole che già conosciamo per le operazioni con i numeri in forma decimale. L'unica differenza è questa: anziché eseguire un riporto quando un risultato è maggiore o uguale a 10, lo si esegue quando un risultato è maggiore o uguale alla base b. Così, dovendo, per esempio, eseguire nel sistema binario l'addizione di due unità di uno stesso ordine, si otterrà un'unità dell'ordine immediatamente superiore.

Le seguenti tabelle agevoleranno i calcoli in base 2 e in base 16. Le cifre scritte in piccolo in tali tabelle costituiscono i riporti.

Sistema binario

TABELLA 2

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	$_{1}0$

TABELLA 3

×	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

Sistema esadecimale

TABELLA 4

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	$_{1}0$
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	$_{1}0$	$_{1}1$
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	$_{1}0$	$_{1}1$	$_{1}2$
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	$_{1}0$	$_{1}1$	$_{1}2$	$_{1}3$
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	$_{1}0$	$_{1}1$	$_{1}2$	$_{1}3$	$_{1}4$
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	$_{1}0$	$_{1}1$	$_{1}2$	$_{1}3$	$_{1}4$	$_{1}5$
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	$_{1}0$	$_{1}1$	$_{1}2$	$_{1}3$	$_{1}4$	$_{1}5$	$_{1}6$
8	8	9	A	B	C	D	E	F	$_{1}0$	$_{1}1$	$_{1}2$	$_{1}3$	$_{1}4$	$_{1}5$	$_{1}6$	$_{1}7$
9	9	A	B	C	D	E	F	$_{1}0$	$_{1}1$	$_{1}2$	$_{1}3$	$_{1}4$	$_{1}5$	$_{1}6$	$_{1}7$	$_{1}8$
A	A	B	C	D	E	F	$_{1}0$	$_{1}1$	$_{1}2$	$_{1}3$	$_{1}4$	$_{1}5$	$_{1}6$	$_{1}7$	$_{1}8$	$_{1}9$
B	B	C	D	E	F	$_{1}0$	$_{1}1$	$_{1}2$	$_{1}3$	$_{1}4$	$_{1}5$	$_{1}6$	$_{1}7$	$_{1}8$	$_{1}9$	$_{1}A$
C	C	D	E	F	$_{1}0$	$_{1}1$	$_{1}2$	$_{1}3$	$_{1}4$	$_{1}5$	$_{1}6$	$_{1}7$	$_{1}8$	$_{1}9$	$_{1}A$	$_{1}B$
D	D	E	F	$_{1}0$	$_{1}1$	$_{1}2$	$_{1}3$	$_{1}4$	$_{1}5$	$_{1}6$	$_{1}7$	$_{1}8$	$_{1}9$	$_{1}A$	$_{1}B$	$_{1}C$
E	E	F	$_{1}0$	$_{1}1$	$_{1}2$	$_{1}3$	$_{1}4$	$_{1}5$	$_{1}6$	$_{1}7$	$_{1}8$	$_{1}9$	$_{1}A$	$_{1}B$	$_{1}C$	$_{1}D$
F	F	$_{1}0$	$_{1}1$	$_{1}2$	$_{1}3$	$_{1}4$	$_{1}5$	$_{1}6$	$_{1}7$	$_{1}8$	$_{1}9$	$_{1}A$	$_{1}B$	$_{1}C$	$_{1}D$	$_{1}E$

TABELLA 5

×	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	$_{1}0$	$_{1}2$	$_{1}4$	$_{1}6$	$_{1}8$	$_{1}A$	$_{1}C$	$_{1}E$
3	0	3	6	9	C	F	$_{1}2$	$_{1}5$	$_{1}8$	$_{1}B$	$_{1}E$	$_{2}1$	$_{2}4$	$_{2}7$	$_{2}A$	$_{2}D$
4	0	4	8	C	$_{1}0$	$_{1}4$	$_{1}8$	$_{1}C$	$_{2}0$	$_{2}4$	$_{2}8$	$_{2}C$	$_{3}0$	$_{3}4$	$_{3}8$	$_{3}C$
5	0	5	A	F	$_{1}4$	$_{1}9$	$_{1}E$	$_{2}3$	$_{2}8$	$_{2}D$	$_{3}2$	$_{3}7$	$_{3}C$	$_{4}1$	$_{4}6$	$_{4}B$
6	0	6	C	$_{1}2$	$_{1}8$	$_{1}E$	$_{2}4$	$_{2}A$	$_{3}0$	$_{3}6$	$_{3}C$	$_{4}2$	$_{4}8$	$_{4}E$	$_{5}4$	$_{5}A$
7	0	7	E	$_{1}5$	$_{1}C$	$_{2}3$	$_{2}A$	$_{3}1$	$_{3}8$	$_{3}F$	$_{4}6$	$_{4}D$	$_{5}4$	$_{5}B$	$_{6}2$	$_{6}9$
8	0	8	$_{1}0$	$_{1}8$	$_{2}0$	$_{2}8$	$_{3}0$	$_{3}8$	$_{4}0$	$_{4}8$	$_{5}0$	$_{5}8$	$_{6}0$	$_{6}8$	$_{7}0$	$_{7}8$
9	0	9	$_{1}2$	$_{1}B$	$_{2}4$	$_{2}D$	$_{3}6$	$_{3}F$	$_{4}8$	$_{5}1$	$_{5}A$	$_{6}3$	$_{6}C$	$_{7}5$	$_{7}E$	$_{8}7$
A	0	A	$_{1}4$	$_{1}E$	$_{2}8$	$_{3}2$	$_{3}C$	$_{4}6$	$_{5}0$	$_{5}A$	$_{6}4$	$_{6}E$	$_{7}8$	$_{8}2$	$_{8}C$	$_{9}6$
B	0	B	$_{1}6$	$_{2}1$	$_{2}C$	$_{3}7$	$_{4}2$	$_{4}D$	$_{5}8$	$_{6}3$	$_{6}E$	$_{7}9$	$_{8}4$	$_{8}F$	$_{9}A$	$_{A}5$
C	0	C	$_{1}8$	$_{2}4$	$_{3}0$	$_{3}C$	$_{4}8$	$_{5}4$	$_{6}0$	$_{6}C$	$_{7}8$	$_{8}4$	$_{9}0$	$_{9}C$	$_{A}8$	$_{B}4$
D	0	D	$_{1}A$	$_{2}7$	$_{3}4$	$_{4}1$	$_{4}E$	$_{5}B$	$_{6}8$	$_{7}5$	$_{8}2$	$_{8}F$	$_{9}C$	$_{A}9$	$_{B}6$	$_{C}3$
E	0	E	$_{1}C$	$_{2}A$	$_{3}8$	$_{4}6$	$_{5}4$	$_{6}2$	$_{7}0$	$_{7}E$	$_{8}C$	$_{9}A$	$_{A}8$	$_{B}6$	$_{C}A$	$_{D}2$
F	0	F	$_{1}E$	$_{2}D$	$_{3}C$	$_{4}B$	$_{5}A$	$_{6}9$	$_{7}8$	$_{8}7$	$_{9}6$	$_{A}5$	$_{B}4$	$_{C}3$	$_{D}2$	$_{E}1$

13 Addizioni, sottrazioni e moltiplicazioni nei sistemi a base 2 e a base 16

Nei seguenti esempi eseguiremo insieme alcune operazioni dando, se necessario, ulteriori chiarimenti.

ESEMPI

1 Sommiamo i numeri 1010_2 e 1011_2.

Disponiamo i due numeri in colonna e sommiamo le unità dello stesso ordine ricordando quanto osservato nel **PARAGRAFO 12** o ricorrendo direttamente alla **TABELLA 2**. Abbiamo così:

$$\begin{array}{cccccll}
 & 1 & 0 & 1 & 0 & + & \\
 & 1 & 0 & 1 & 1 & = & \\
\mathbf{1} & & \mathbf{1} & & & & \longleftarrow \textbf{riporti} \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & \longleftarrow \textbf{risultato}
\end{array}$$

2 Sommiamo i numeri 10110101_2 e 101100_2:

$$\begin{array}{cccccccccll}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & + & \\
 & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & = & \\
 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & & & & & \longleftarrow \textbf{riporti} \\
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \longleftarrow \textbf{risultato}
\end{array}$$

3 Sommiamo i numeri $7A0B_{16}$ e $1C931_{16}$:

$$\begin{array}{cccccll}
 & 7 & A & 0 & B & + & \\
1 & C & 9 & 3 & 1 & = & \\
\mathbf{1} & \mathbf{1} & & & & & \longleftarrow \textbf{riporti} \\
\hline
2 & 4 & 3 & 3 & C & & \longleftarrow \textbf{risultato}
\end{array}$$

4 Eseguiamo la sottrazione $11011_2 - 1101_2$.
Disponiamo i due numeri in colonna e sottraiamo da ogni cifra del minuendo la corrispondente cifra del sottraendo. Teniamo presente che se operiamo in un sistema a base *b*, una unità di ordine immediatamente superiore nel minuendo si trasforma in *b* unità dell'ordine della cifra considerata nel sottraendo:

$$\begin{array}{cccccc}
\dot{1} & \dot{1} & 0 & 1 & 1 & - \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & = \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 &
\end{array}$$

Sono state soprassegnate le cifre che si sono trasformate in due unità dell'ordine inferiore.
Il risultato è 1110_2.

5 Eseguiamo la sottrazione $AC08F_{16} - 25A2B_{16}$:

$$\begin{array}{cccccc}
A & C & 0 & 8 & F & - \\
2 & 5 & A & 2 & B & = \\
\hline
8 & 6 & 6 & 6 & 4 &
\end{array}$$

Il risultato è 86664_{16}. Possiamo verificare che $86664_{16} + 25A2B_{16} = AC08F_{16}$.

6 Moltiplichiamo i numeri 11010_2 e 110010_2:

$$\begin{array}{cccccccccccll}
 & & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \times & \\
 & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & = & \\
\hline
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & & & & & & \\
\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & & & & & & & & \longleftarrow \textbf{riporti} \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & & \longleftarrow \textbf{risultato}
\end{array}$$