ESERCIZI

L'insieme dei numeri reali

RICORDIAMO LA TEORIA

- **Numero irrazionale**: numero non esprimibile mediante una frazione.
- **Rappresentazione decimale di un numero irrazionale**: è *infinita* e *non periodica*.
- **Insieme dei numeri reali**: si indica con $\mathbb{R}$ e ha per elementi tutti i numeri razionali e tutti i numeri irrazionali. $\mathbb{R}$ è un *ampliamento* dell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

QUESITI

1 Quali operazioni non sempre si possono eseguire in $\mathbb{N}$? E quali in $\mathbb{Z}$?

2 Quale operazione non sempre si può eseguire in $\mathbb{Q}$?

3 Che cos'è un numero irrazionale? Che cos'è un numero reale?

4 Spiega perché è errato scrivere $\pi = 3{,}14$.

VERO O FALSO?

5
a. $\sqrt{2} = 1{,}414$ V F
b. $\sqrt{9}$ non è razionale. V F
c. $\sqrt{\dfrac{9}{4}}$ è razionale. V F
d. $\sqrt{13}$ è irrazionale. V F

6
a. Ogni numero razionale è anche un numero reale. V F
b. Un numero con rappresentazione decimale periodica è razionale. V F
c. Un numero irrazionale può avere una rappresentazione decimale periodica. V F
d. Un numero irrazionale è anche un numero reale. V F

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

7 L'insieme dei numeri interi relativi è contenuto nell'insieme dei numeri

a naturali **b** razionali **c** razionali positivi **d** irrazionali

8 L'insieme dei numeri irrazionali è contenuto nell'insieme dei numeri

a reali **b** razionali **c** naturali **d** reali positivi

9 La rappresentazione decimale di un numero irrazionale è

a finita **b** periodica **c** infinita e non periodica **d** nessuna delle risposte precedenti

10 La rappresentazione decimale del numero $\frac{5}{7}$ è

a finita **b** periodica **c** infinita e non periodica **d** nessuna delle risposte precedenti

Determina la rappresentazione decimale, limitata alle prime due cifre dopo la virgola, dei seguenti numeri irrazionali (usa la calcolatrice solo per le quattro operazioni aritmetiche).

11 $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $-\sqrt{11}$

12 $\sqrt{7}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{13}$

La retta reale

RICORDIAMO LA TEORIA

- **Numeri reali e punti della retta**: se su una retta si fissa un'*origine* e un *verso* e si fissa un'*unità di misura* per le lunghezze, risulta stabilita una *corrispondenza biunivoca* tra i numeri reali e i punti della retta. Tale retta è detta *retta reale* o *asse reale*; sulla retta reale rimane così individuato un *sistema di coordinate*. Il numero reale x_P associato a un punto P è detto *ascissa* di P.
- **Distanza tra due punti *A* e *B* della retta reale**: $\overline{AB} = |x_B - x_A|$

QUESITI

13 Che cos'è la retta reale? Che cos'è l'ascissa di un punto sulla retta reale?

14 Come si calcola la distanza tra due punti della retta reale conoscendo le loro ascisse?

15 Conoscendo la distanza tra due punti A e B della retta reale, è possibile stabilire se A precede o segue B nel verso fissato?

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

16 Ogni punto della retta reale è associato a un

a numero intero relativo **b** numero reale **c** numero irrazionale **d** numero razionale

17 Le ascisse dei punti A e B sull'asse reale sono, rispettivamente, -3 e -6. La distanza $\overline{AB}$ è

a 9 **b** -3 **c** 3 **d** nessuna delle risposte precedenti

Scrivi in ordine crescente i seguenti numeri, rappresentandoli su una retta reale su cui è stato fissato un sistema di riferimento.

18 $\frac{1}{2}$; -2; $\frac{9}{8}$; $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{5}$; $-0{,}5$; $+\sqrt{3}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{7}{8}$

19 $\frac{4}{5}$; $-\frac{3}{4}$; $0{,}\bar{3}$; $0{,}5$; $-\frac{1}{5}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{4}$; $\frac{15}{4}$

---

20 Su una retta orientata x sono dati i punti A e B tali che $x_A = -3$ e $x_B = 8$. Determina $\overline{AB}$. [11]

21 Dati, su una retta reale r, i punti A, B, C, essendo $x_A = 1$, $x_B = -\frac{5}{4}$, $x_C = \frac{3}{2}$, determina $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$.

22 Data una retta reale r, rappresenta i punti A, B, C, D di ascisse $x_A = -2$, $x_B = -\frac{1}{2}$, $x_C = 1$, $x_D = -4$. Determina poi le misure delle lunghezze dei segmenti AB, AC, AD, CD, BC, BD.

23 Su una retta reale r sono dati i punti A, B, C di ascisse $x_A = 2$, $x_B = -6$, $x_C = -1$. Calcola le distanze tra A e B, tra A e C, tra B e C e verifica che $\overline{BC} + \overline{CA} = \overline{BA}$.

Calcolo approssimato

RICORDIAMO LA TEORIA

- **Approssimazione di un numero c**: è qualunque numero a «abbastanza vicino» a c, che può essere usato al posto di c nei calcoli.
  3,14 è un'approssimazione di π.
- **Uguaglianza approssimata**
  Il simbolo $\simeq$ di uguaglianza approssimata significa «è approssimativamente uguale a». Ad esempio $\pi \simeq 3{,}14$ si legge «π è approssimativamente uguale a 3,14» o anche «π è uguale circa a 3,14».
- **Approssimazione per difetto di c**: è un'approssimazione $a < c$.
  1,4 è un'approssimazione per difetto di $\sqrt{2}$.
- **Approssimazione per eccesso di c**: è un'approssimazione $a > c$.
  1,5 è un'approssimazione per eccesso di $\sqrt{2}$.
- **Errore assoluto**: è il valore assoluto della differenza tra il numero c e la sua approssimazione a e si indica con e:
  $$e = |c - a|$$
  0,3 è un'approssimazione di $\frac{1}{3}$ affetta da un errore assoluto $e = \left|\frac{1}{3} - 0{,}3\right| = \frac{1}{30}$.
- **Errore relativo**: è il rapporto tra l'errore assoluto e il valore assoluto dell'approssimazione a di c:
  $$e_r = \frac{e}{|a|} = \frac{|c-a|}{|a|}$$
  0,3 è un'approssimazione di $\frac{1}{3}$ affetta da un errore relativo $e_r = \frac{\left|\frac{1}{3} - 0{,}3\right|}{0{,}3} = \frac{1}{9} \simeq 11{,}1\%$.
- **Valore abbreviato alla *n*-esima cifra decimale**: è l'approssimazione per difetto che si ottiene sopprimendo tutte le cifre che seguono la n-esima cifra dopo la virgola.
  Il valore di $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$ abbreviato alla seconda cifra decimale è 0,66.
- **Valore arrotondato alla *n*-esima cifra decimale**
  - Se la prima cifra decimale dopo la n-esima è 0, 1, 2, 3, 4, il valore arrotondato coincide con il valore abbreviato alla n-esima cifra dopo la virgola.
  - Se la prima cifra decimale dopo la n-esima è 5, 6, 7, 8, 9, il valore arrotondato si ottiene dal valore abbreviato alla n-esima cifra dopo la virgola, aumentandone l'ultima cifra di un'unità.

  Il valore di $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$ arrotondato alla seconda cifra decimale è $0{,}66 + 0{,}01 = 0{,}67$.

QUESITI

24 Qual è l'errore assoluto che si commette se si assume 2 come approssimazione del numero 2,1?

25 In quali casi, operando con i numeri decimali, si commettono errori di approssimazione?

26 Trova un'approssimazione per difetto e una per eccesso di $\sqrt{10}$.

27 Qual è il valore abbreviato alla seconda cifra decimale di 2,71828...?

28 Dai una maggiorazione dell'errore che si commette abbreviando π alla seconda cifra decimale.

29 Qual è il valore arrotondato alla seconda cifra decimale di 2,71828...?

30 Dai una maggiorazione dell'errore che si commette arrotondando π alla seconda cifra decimale.

VERO O FALSO?

31 **a.** Un'approssimazione per eccesso è sempre migliore di un'approssimazione per difetto. V F

b. Un'approssimazione per eccesso è sempre maggiore della relativa approssimazione per difetto. V F

c. L'errore assoluto è la differenza tra il numero e la sua approssimazione. V F

d. Gli errori relativi si possono esprimere mediante percentuali. V F

e. Il valore arrotondato a una certa cifra decimale è un'approssimazione sempre migliore del valore abbreviato. V F

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

32 Qual è tra le seguenti la migliore approssimazione di $\pi = 3{,}141592654...$?

a 3,14 **b** 3,15 **c** 3,1415 **d** 3,1416 **e** 3,141

33 Il valore di 3,9962277... arrotondato alla seconda cifra decimale è

a 3,99 **b** 3,999 **c** 3,98 **d** 4,00 **e** 3,00

34 Approssimando 1,9 con il numero 2 si commette un errore assoluto pari a

a $-0{,}1$ **b** 0,1 **c** 1,9 **d** 2 **e** 0,01

35 Arrotondando un numero alla terza cifra decimale si commette un errore minore di

a 0,01 **b** 0,005 **c** 0,001 **d** 0,0005 **e** $-0{,}001$

Calcola i valori approssimati, per eccesso e per difetto, a meno di 0,01 dei seguenti numeri.

36 $\frac{2174}{1000}$; $-\frac{3175}{2000}$; $\frac{11}{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $-\frac{13}{6}$

38 $-7{,}28 \cdot 10^{-2}$; $\frac{19}{11}$; $\sqrt{10} - \pi$; $\sqrt{2} + 1$

37 $\frac{321}{10.000}$; $-\frac{573}{20}$; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{7}$; $0{,}2\overline{3}$

Errore assoluto ed errore relativo

Calcola l'errore assoluto che si commette prendendo al posto dei seguenti numeri il valore posto tra parentesi a fianco di ciascuno di essi, specificando se tale valore è approssimato per difetto o per eccesso.

39 $\frac{10}{3}$ (3,3) $\frac{10}{3}$ (3,333) $-\frac{10}{3}$ $(-3{,}34)$ $\left[\frac{1}{30}; \frac{1}{3000}; \frac{1}{150}\right]$

40 $1{,}1\overline{6}$ (1,16) $1{,}1\overline{6}$ (1,166) $1{,}1\overline{6}$ (1,17) $\left[\frac{1}{150}; \frac{1}{1500}; \frac{1}{300}\right]$

41 $\frac{5}{3}$ (2) $\frac{5}{3}$ (1,66) $\frac{5}{3}$ (1,67) $\frac{5}{3}$ (1,6666) $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{150}; \frac{1}{300}; \frac{1}{15.000}\right]$

42 Determina una maggiorazione dell'errore assoluto che si commette assumendo per $\sqrt{2}$ rispettivamente i seguenti valori:

1,4 1,5 1,41 1,414 1,4142

Un numero è noto mediante la sua approssimazione *a*, affetta dall'errore assoluto e a fianco indicato. Determina l'errore relativo e_r.

43 $a = 151{,}3$; $e = 9{,}07$ $a = 0{,}541$; $e = 0{,}065$ [6%; 12%]

44 $a = -83{,}4$; $e = 2{,}5$ $a = 7{,}5 \cdot 10^{-3}$; $e = 6 \cdot 10^{-4}$ [3%; 8%]

45 $a = 0{,}93 \cdot 10^{-5}$; $e = 12 \cdot 10^{-8}$ $a = 1{,}207$; $e = 0{,}04$ [1,3%; 3,3%]

Un numero è noto mediante la sua approssimazione *a*, affetta dall'errore relativo e_r a fianco indicato. Valuta l'errore assoluto *e*.

46 $a = 8734$; $e_r = 13\%$ $a = 25{,}31$; $e_r = 0{,}003$ [1135; 0,08]

47 $a = 0{,}59$; $e_r = 4\%$ $a = 1{,}29$; $e_r = 0{,}15$ [0,024; 0,2]

48 $a = 0{,}63 \cdot 10^{-5}$; $e_r = 7\%$ $a = 45{,}18 \cdot 10^{-9}$; $e_r = 2{,}5\%$ [$4{,}41 \cdot 10^{-7}$; $11{,}3 \cdot 10^{-10}$]

---

49 Di un numero x è noto il valore approssimato 2,38 con un errore relativo inferiore al 5%. Determina una maggiorazione dell'errore assoluto. [$e < 0{,}119$]

50 Indica una maggiorazione dell'errore assoluto da cui è affetto il valore approssimato $a = 0{,}51 \cdot 10^{-2}$ di un numero incognito x, sapendo che a approssima x con un errore relativo inferiore al 3%. [$e < 1{,}53 \cdot 10^{-4}$]

Valori abbreviati

51 Scrivi il valore abbreviato alla quarta cifra decimale del numero $2{,}7\overline{3}$ e verifica che l'errore assoluto da cui tale valore è affetto è minore di 10^{-4}.

52 Scrivi il valore abbreviato alla seconda cifra decimale del numero $\sqrt{2}$ e una maggiorazione dell'errore assoluto da cui tale approssimazione è affetta.

53 Scrivi il valore abbreviato alla terza cifra decimale del numero $\frac{8}{3}$, l'errore assoluto e l'errore relativo da cui è affetta l'approssimazione considerata. $\left[2{,}666;\ \frac{1}{1500};\ 0{,}025\%\right]$

54 Scrivi il valore abbreviato alla seconda cifra decimale di $\sqrt{5}$; determina una maggiorazione dell'errore assoluto e una dell'errore relativo da cui è affetta l'approssimazione considerata. [2,23; 0,01; 0,45%]

I seguenti numeri sono i valori abbreviati, all'ultima cifra decimale scritta, di altrettanti numeri incogniti. Determina una maggiorazione dell'errore relativo da cui sono affetti.

55 0,8; 9,8; 4,23; 112,4 [12,5%; 1,03%; 0,24%; 0,09%]

56 $5{,}82 \cdot 10^{-4}$; $9{,}36 \cdot 10^{-2}$ [0,18%; 0,11%]

Valori arrotondati

57 Sappiamo che $\pi = 3{,}1415926...$; determina il valore di π arrotondato alla seconda cifra decimale e verifica che tale approssimazione è affetta da un errore non superiore a $0{,}005 = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$.

58 Determina il valore di π arrotondato alla quarta cifra decimale, una maggiorazione dell'errore assoluto e una dell'errore relativo.

59 Determina i valori di $\sqrt{3} = 1{,}7320508...$ arrotondati alla terza e alla quarta cifra decimale e fornisci in entrambi i casi una maggiorazione dell'errore assoluto.

Dei seguenti numeri determina i valori arrotondati alle cifre decimali indicate a fianco del numero stesso e maggiorane l'errore assoluto.

60 $\frac{11}{3} = 3{,}\overline{6}$; 3ª cifra; 5ª cifra [3,667; 3,66667]

61 $\sqrt{5} = 2{,}23606...$; 3ª cifra; 4ª cifra [2,236; 2,2361]

62 $\sqrt{18} = 4{,}24264...$; 2ª cifra; 4ª cifra

63 $\sqrt{22} = 4{,}69041...$; 2ª cifra; 3ª cifra

64 $\sqrt{50} = 7{,}07106...$; 1ª cifra; 2ª cifra; 3ª cifra

I seguenti numeri sono i valori arrotondati, all'ultima cifra decimale scritta, di numeri incogniti. Calcola una maggiorazione dell'errore assoluto e una dell'errore relativo da cui sono affetti tali valori.

65 $9{,}6$; $1{,}5$ [$5 \cdot 10^{-2}$ e $0{,}53\%$; $0{,}05$ e $3{,}4\%$]

66 $120{,}4$; $0{,}033$ [$0{,}05$ e $0{,}042\%$; $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ e $1{,}52\%$]

67 $4{,}28 \cdot 10^{-7}$ [$0{,}5 \cdot 10^{-9}$; $0{,}12\%$]

