UNITÀ 4

Numeri reali

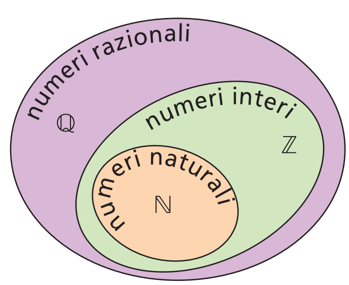
- L'insieme dei numeri reali
- La retta reale
- Calcolo approssimato

L'insieme dei numeri reali

1 Ampliamento degli insiemi numerici

Nelle precedenti unità, dopo aver introdotto l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, abbiamo dovuto ampliarlo con l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi e, successivamente, abbiamo dovuto ampliare $\mathbb{Z}$ con l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, per poter eseguire le operazioni di sottrazione e di divisione che altrimenti non sempre sarebbero state possibili.

Nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è possibile eseguire le quattro operazioni aritmetiche, con l'unica eccezione della divisione per zero. L'insieme $\mathbb{Q}$ contiene come sottoinsieme l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi il quale, a sua volta, contiene come sottoinsieme l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali (**FIGURA 1**).



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

FIGURA 1

L'operazione di estrazione di radice quadrata, molto frequente in matematica, non sempre è definita in $\mathbb{Q}$. Ad esempio, non è possibile calcolare $\sqrt{2}$ nell'insieme $\mathbb{Q}$; infatti, come si potrebbe dimostrare, non esiste alcun numero intero o frazionario il cui quadrato sia 2.

In generale, se il numero naturale n non è un quadrato perfetto, cioè non è il quadrato di un altro numero naturale, non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia n. Inoltre se il numero razionale q non è il quoto tra due quadrati perfetti, cioè tra i quadrati di due numeri naturali, non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia q.

PREREQUISITI

È sufficiente una conoscenza basilare degli insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.
In particolare devi aver ben presente la rappresentazione decimale dei numeri razionali.

OBIETTIVI

Conoscenze

- Consapevolezza della necessità di ampliare l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali
- Concetto di numero irrazionale e di sua rappresentazione decimale
- Concetto di numero reale
- Concetto di corrispondenza biunivoca tra i numeri reali e i punti della retta reale
- Concetti di approssimazione e di errore in un'approssimazione

Abilità

- Distinguere un numero razionale da un numero irrazionale
- Calcolare la distanza tra due punti della retta reale
- Calcolare l'errore relativo conoscendo l'errore assoluto e viceversa
- Determinare il valore abbreviato e quello arrotondato di un numero decimale

Possiamo quindi dedurre che non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia, ad esempio,

$$2 \qquad 3 \qquad 5 \qquad \frac{2}{3} \qquad \frac{10}{7} \qquad \ldots$$

Pertanto **non** possono essere *numeri razionali*:

$$\sqrt{2} \qquad \sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \sqrt{\frac{10}{7}} \qquad \ldots$$

D'altra parte, se utilizziamo una calcolatrice scientifica per calcolare $\sqrt{2}$, otteniamo

$$\sqrt{2} \longrightarrow \boxed{1.414213562}$$

Tenendo presente che le calcolatrici usano il punto al posto della virgola, possiamo notare che $\sqrt{2}$ è un numero decimale che ha 1 come parte intera e la cui parte frazionaria è costituita da 4 decimi, 1 centesimo, 4 millesimi, 2 decimillesimi ecc.

Ma la rappresentazione decimale di $\sqrt{2}$ non può essere finita e neppure periodica perché, altrimenti, $\sqrt{2}$ sarebbe un numero razionale. La rappresentazione decimale di $\sqrt{2}$ non può che essere infinita e non periodica: la calcolatrice scientifica fornisce, evidentemente, solo le prime cifre della parte frazionaria.

IMPORTANTE

Come abbiamo visto nell'**UNITÀ 3**, ogni frazione può essere rappresentata da un numero decimale finito o periodico. E, viceversa, **ogni numero che ha una rappresentazione decimale finita o periodica è razionale.**

Osserviamo infine che anche l'operazione di estrazione di radice cubica non sempre è definita in $\mathbb{Q}$. Per esempio, è $\sqrt[3]{8} = 2$, mentre $\sqrt[3]{5}$ non è definita in $\mathbb{Q}$ perché, come si potrebbe dimostrare, non esiste alcun numero razionale il cui cubo sia 5.

PER APPROFONDIRE

Dimostriamo che $\sqrt{2}$ **non è un numero razionale**.

Per dimostrare questa affermazione *ragioniamo per assurdo* supponendo, invece, che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale. Allora, indicando con m ed n due numeri naturali non nulli, risulterebbe

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad \longrightarrow \quad 2 = \frac{m^2}{n^2} \quad \longrightarrow \quad 2 \cdot n^2 = m^2$$

cioè

$$m^2 = 2n^2 \qquad \boxed{1}$$

La $\boxed{1}$ esprime l'uguaglianza tra i numeri naturali m^2 e $2n^2$. Osserviamo poi che se due numeri naturali sono uguali, essi devono avere la stessa scomposizione in fattori primi.
Sono ora possibili, in alternativa, due casi.

- **Primo caso**. Il numero m non contiene il fattore 2 nella sua scomposizione in fattori primi.
  In questo caso la $\boxed{1}$ è un'uguaglianza assurda: infatti m^2 non contiene il 2 mentre $2n^2$ lo contiene almeno una volta (per la presenza del fattore 2 che moltiplica n^2).
- **Secondo caso**. Il numero m contiene il fattore 2 nella sua scomposizione in fattori primi.
  Anche in questo caso la $\boxed{1}$ è un'uguaglianza assurda; infatti m^2 contiene il 2 un numero *pari* di volte (2, 4, 6, ... volte), mentre $2n^2$ lo contiene un numero *dispari* di volte (ad esempio una sola volta se n non contiene il 2, tre volte se n contiene il 2 una volta, cinque volte se n contiene il 2 due volte ecc.).

Possiamo concludere che la $\boxed{1}$ è in ogni caso un'uguaglianza assurda e quindi era assurdo supporre che $\sqrt{2}$ fosse razionale. Pertanto $\sqrt{2}$ è necessariamente un numero non razionale, come volevamo dimostrare.

Con un procedimento analogo è possibile dimostrare che non sono razionali numeri quali $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[3]{2}$ ecc.

In geometria avrai modo di incontrare spesso questo tipo di dimostrazione, cioè la *dimostrazione per assurdo* (vedi anche l'**UNITÀ 7** sulla *logica*).

2 L'estrazione di radice quadrata

Come abbiamo già detto, nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali non sempre è possibile eseguire l'operazione inversa dell'operazione di elevamento al quadrato, cioè l'**estrazione di radice quadrata**. Torneremo su questo argomento; per ora è opportuno tenere presente la seguente definizione.

DEFINIZIONE RADICE QUADRATA

Si dice radice quadrata di un numero $a \geq 0$, e si indica con il simbolo $\sqrt{a}$, il numero $b \geq 0$ il cui quadrato è uguale ad a. In simboli

$$\boxed{\sqrt{a} = b \quad \Longleftrightarrow \quad b^2 = a \qquad a \geq 0,\ b \geq 0}$$

Nell'insieme $\mathbb{Q}$ è quindi possibile calcolare, ad esempio, $\sqrt{4}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{\frac{1}{9}}$, $\sqrt{\frac{16}{169}}$. Infatti

$$\sqrt{4} = 2 \text{ perché } 2^2 = 4$$

$$\sqrt{25} = 5 \text{ perché } 5^2 = 25$$

$$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \text{ perché } \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{\frac{16}{169}} = \frac{4}{13} \text{ perché } \left(\frac{4}{13}\right)^2 = \frac{16}{169}$$

3 I numeri irrazionali

Da quanto abbiamo visto, è evidente la necessità di ampliare l'insieme dei numeri razionali considerando, oltre a essi, i **numeri irrazionali**, ossia quei numeri che, come $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ..., non possono essere espressi da frazioni.

I numeri irrazionali sono molto frequenti anche in geometria perché esprimono le misure delle lunghezze di molti segmenti rispetto a una prefissata unità di misura.

RICORDA!

- **Numeri razionali**
  Sono i numeri che si possono esprimere mediante frazioni.
- **Numeri irrazionali**
  Sono i numeri che **non** si possono esprimere mediante frazioni.

Ad esempio, la misura d in centimetri della diagonale di un quadrato il cui lato è 1 cm (FIGURA 2) è, per il teorema di Pitagora,

$$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

La misura h in centimetri dell'altezza di un triangolo equilatero il cui lato è 2 cm (FIGURA 3) è, sempre per il teorema di Pitagora,

$$h = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

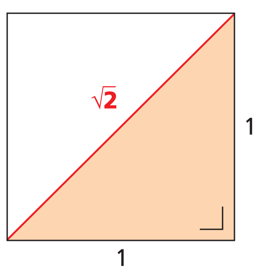


FIGURA 2

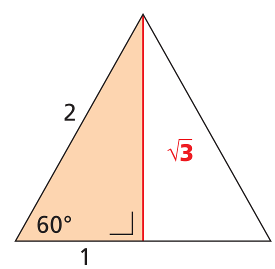


FIGURA 3

Oltre ai numeri irrazionali come $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ..., in matematica si incontrano anche numeri irrazionali che non provengono da un'estrazione di radice. Ad esempio, è irrazionale il numero π («pi greco»), ottenuto come rapporto tra la misura di una generica circonferenza e quella del suo diametro (FIGURA 4):

$$\pi = 3{,}141592654...$$

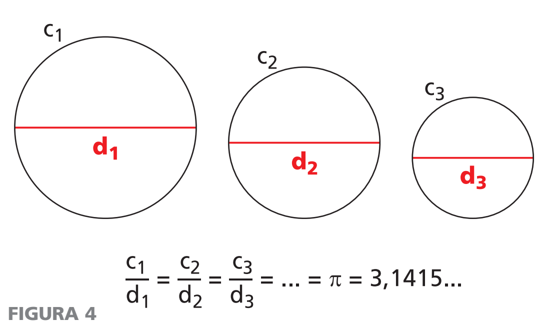


FIGURA 4

4 L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali

DEFINIZIONE **INSIEME DEI NUMERI REALI**

L'insieme costituito dai numeri razionali e dai numeri irrazionali è detto insieme dei numeri reali.

L'insieme dei numeri reali (FIGURA 5) si indica con $\mathbb{R}$. Tutti gli insiemi numerici finora incontrati sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

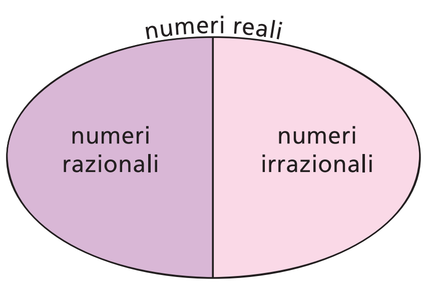


FIGURA 5

In **FIGURA 6** la parte di $\mathbb{R}$ colorata in rosa rappresenta l'insieme differenza $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dei numeri reali che non sono razionali, cioè l'insieme dei numeri irrazionali. Si potrebbe dimostrare che tutte le proprietà delle operazioni che sono valide in $\mathbb{Q}$ sono valide anche in $\mathbb{R}$.
In seguito impareremo a operare anche con i numeri irrazionali.

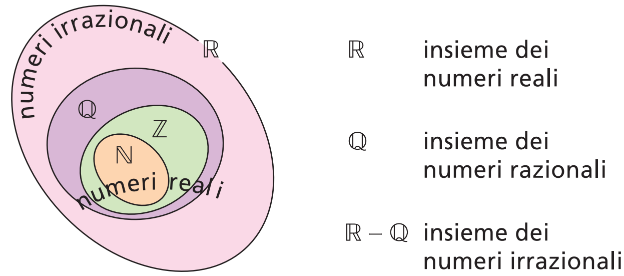


FIGURA 6

5 Rappresentazione decimale dei numeri irrazionali

Sappiamo che i numeri razionali possono essere rappresentati in forma decimale. Vediamo ora come sia possibile rappresentare in tale forma anche un numero irrazionale.
Fissiamo l'attenzione su $\sqrt{2}$ e cerchiamo di determinarne, una per una, le cifre decimali senza ricorrere a una calcolatrice scientifica.

- Poiché si ha $1^2 = 1 < 2$ e $2^2 = 4 > 2$, possiamo dire che 1 è un'*approssimazione per difetto* di $\sqrt{2}$ e 2 ne è un'*approssimazione per eccesso*, ossia che è
$$1 < \sqrt{2} < 2$$
Perciò possiamo scrivere
$$\sqrt{2} = 1,...$$
dove i puntini di sospensione stanno a indicare cifre decimali che si devono ancora determinare.

- Consideriamo ora i numeri decimali dotati di una cifra dopo la virgola, compresi tra 1 e 2, e confrontiamo i loro quadrati con il numero 2. Si ha
$$1{,}1^2 = 1{,}21 < 2$$
$$1{,}2^2 = 1{,}44 < 2$$
$$1{,}3^2 = 1{,}69 < 2$$
$$1{,}4^2 = 1{,}96 < 2$$
$$1{,}5^2 = 2{,}25 > 2$$
Possiamo allora affermare che 1,4 è un'approssimazione per difetto di $\sqrt{2}$ e 1,5 ne è un'approssimazione per eccesso, ossia che
$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$
Perciò possiamo scrivere
$$\sqrt{2} = 1{,}4...$$

- Se ora confrontiamo con 2 i quadrati dei numeri decimali con due cifre dopo la virgola compresi tra 1,4 e 1,5, troviamo che
$$1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2$$
$$1{,}42^2 = 2{,}0164 > 2$$
Perciò 1,41 e 1,42 sono approssimazioni, rispettivamente per difetto e per eccesso, di $\sqrt{2}$:
$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$
e quindi
$$\sqrt{2} = 1{,}41...$$

Il procedimento descritto può proseguire fino a determinare il numero di cifre decimali che si vuole, ma non può avere termine e non può neppure generare un numero periodico. Infatti i numeri decimali

finiti o periodici, come sai dall'UNITÀ 3, sono numeri razionali, mentre $\sqrt{2}$ è irrazionale.
Ad esempio, sarebbe errato scrivere $\sqrt{2} = 1{,}41$, perché è $1{,}41 = \frac{141}{100}$ e, come abbiamo già detto, $\sqrt{2}$ non può essere rappresentato da una frazione.

Queste conclusioni si possono generalizzare.

Un numero irrazionale si può sempre rappresentare in forma decimale; tale rappresentazione è costituita di un numero infinito di cifre e non è periodica.

ATTENZIONE!

Poiché è

$$\sqrt{2} = 1{,}414213...$$

si può scrivere

$$\sqrt{2} = 1{,}41...$$

oppure

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}41$$

(si legge $\sqrt{2}$ è uguale circa a 1,41).
È invece *errato* scrivere $\sqrt{2} = 1{,}41$; infatti $\sqrt{2}$ è irrazionale, mentre 1,41 è razionale.

IN SINTESI...

Tutti i numeri reali si possono rappresentare in forma decimale.
I numeri razionali hanno una rappresentazione finita o periodica, i numeri irrazionali hanno una rappresentazione infinita, cioè illimitata, e non periodica.

La retta reale

6 Numeri reali e punti della retta

L'insieme dei numeri reali può essere utilmente rappresentato su una retta.

A tal fine è necessario scegliere un'**unità di misura delle lunghezze** e fissare sulla retta prescelta un punto O, che chiameremo **origine**, e un **verso** (indicato in FIGURA 7 dalla freccia). In questo modo è possibile associare a ogni punto della retta un numero reale, procedendo nel modo seguente.

Cominciamo con l'associare al punto O il numero zero; riportiamo poi sulla retta il segmento OA, di lunghezza unitaria, in modo che, nel verso prefissato (di solito, se la retta è disegnata orizzontalmente, da sinistra a destra), il punto A segua O. Al punto A sarà associato il numero 1.
Riportiamo poi un altro segmento di lunghezza unitaria AB, sempre in modo che B segua A. Al punto B sarà associato il numero 2.

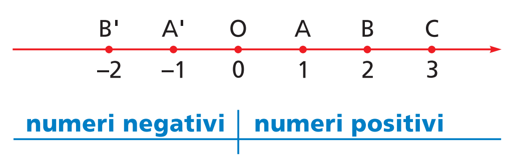


FIGURA 7

Procedendo così, si determinano sulla retta i punti che si associano ai numeri interi positivi. In modo analogo, ma operando in senso opposto al verso prefissato, si determinano i punti A', B', ecc. che sono associati ai numeri interi negativi -1, -2 ecc.

Per associare un numero reale a uno qualsiasi degli altri punti, se ne determina innanzi tutto il segno: se il punto si trova, nel verso prescelto, dopo l'origine O, a esso sarà associato un numero positivo, se invece il punto precede O, a esso assoceremo un numero negativo.

Per illustrare il modo in cui si determina la rappresentazione decimale del numero associato a un punto della retta, consideriamo, per esempio, il punto P in FIGURA 8: sia x il numero, da determinare, associato a esso. Poiché P segue l'origine O, tale numero sarà positivo.

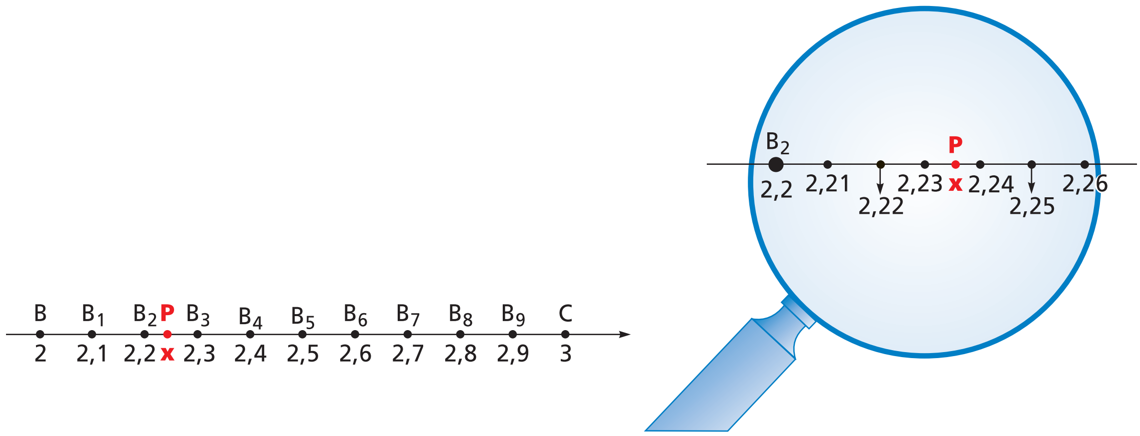


FIGURA 8

Poiché P segue il punto B e precede il punto C, a cui sono rispettivamente associati i numeri 2 e 3, il numero x da associare a P dovrà essere tale che

$$2 < x < 3 \quad \longrightarrow \quad x = 2,...$$

Dividiamo poi il segmento BC in dieci segmenti congruenti.
Ai loro estremi interni a BC, ossia a

$$B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad ... \quad B_9$$

associamo rispettivamente i numeri

$$2,1 \quad 2,2 \quad 2,3 \quad ... \quad 2,9$$

NOTA BENE

In geometria **segmenti congruenti** significa «segmenti sovrapponibili con un movimento rigido» e quindi segmenti con la stessa lunghezza.

Poiché il punto P cade tra i punti B_2 e B_3, associati rispettivamente a 2,2 e a 2,3, dovrà essere

$$2,2 < x < 2,3 \quad \longrightarrow \quad x = 2,2...$$

Dividiamo poi il segmento B_2B_3 in dieci segmenti congruenti, trovando

$$2,23 < x < 2,24 \quad \longrightarrow \quad x = 2,23...$$

Procedendo in questo modo si possono determinare quante cifre decimali si vogliono: resta così determinato anche il numero x associato al punto P.

Si potrebbe anche dimostrare che, viceversa, ad ogni numero reale si può associare un punto della retta.

- Resta così stabilita una **corrispondenza biunivoca tra numeri reali e punti della retta**: a ogni punto della retta è associato un numero reale e a ogni numero reale è associato un punto della retta.
- Quando su una retta è stabilita una tale corrispondenza biunivoca, diremo che sulla retta si è stabilito un **sistema di coordinate**; la retta stessa viene allora chiamata **retta reale**, o anche **asse reale**.

Il numero reale associato a un punto P si chiama allora **coordinata ascissa**, o semplicemente **ascissa**, di P e si indica anche con x_P.

ESEMPIO

Vogliamo ordinare (ossia scrivere, ad esempio, in ordine crescente) i numeri

$$\sqrt{2} \qquad -\frac{7}{2} \qquad -3 \qquad \frac{7}{5} \qquad -\frac{1}{3} \qquad 1{,}3$$

Rappresentiamo i numeri dati su una retta reale (**FIGURA 9**).

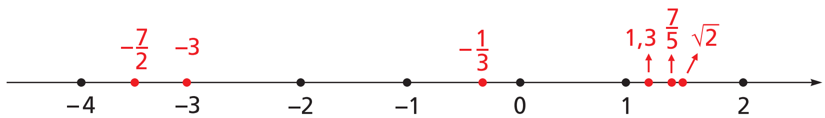


FIGURA 9

Si ha perciò
$$-\frac{7}{2} < -3 < -\frac{1}{3} < 1{,}3 < \frac{7}{5} < \sqrt{2}$$

Osserva che in **FIGURA 9** sono disegnati dei punti, in corrispondenza ai quali sono indicate le rispettive ascisse.

7 Distanza tra due punti della retta reale

Consideriamo su una retta, su cui sia fissato un sistema di coordinate, due punti A e B; siano x_A e x_B le loro ascisse. Qual è la distanza tra A e B, ossia qual è la misura della lunghezza di AB rispetto all'unità di misura prescelta?

- Per fissare le idee supponiamo che sia $x_A = 3$ e $x_B = 5$ (**FIGURA 10**). Osserviamo che il segmento OB è la somma di OA e AB:

$$OB = OA + AB$$

Quindi, considerando le misure delle lunghezze dei segmenti, sarà

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$$

NOTA BENE

Per **distanza** tra due punti si intende, in geometria razionale, la lunghezza del segmento che congiunge i due punti o la sua misura rispetto a una prefissata unità. Se A e B sono due punti, la misura della lunghezza del segmento AB si indica con $\overline{AB}$.

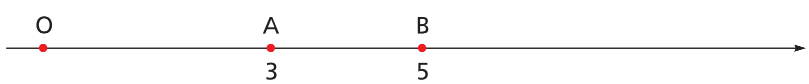


FIGURA 10

Ma è $\overline{OB} = x_B = 5$ e $\overline{OA} = x_A = 3$; quindi l'uguaglianza precedente diviene

$$5 = 3 + \overline{AB} \quad \longrightarrow \quad \overline{AB} = 5 - 3 = 2$$

In pratica, per determinare la distanza tra A e B si calcola la differenza tra le loro ascisse:

$$\overline{AB} = x_B - x_A \qquad \boxed{1}$$

- La formula $\boxed{1}$ non è però adeguata qualora A segua B. Consideriamo per esempio il caso in cui sia $x_A = 9$ e $x_B = 6$ (**FIGURA 11**).

FIGURA 11

Dalla $\boxed{1}$ si otterrebbe $\overline{AB} = x_B - x_A = 6 - 9 = -3$. Tale risultato non ha senso, perché la misura del segmento AB non può essere negativa. In realtà in questo caso si ha $\overline{AB} = 3$, ossia

$$\overline{AB} = -(-3) = -(x_B - x_A)$$

In pratica, se il numero $x_B - x_A$ risulta positivo, esso esprime la misura della distanza tra A e B; se invece $x_B - x_A$ risulta negativo, per ottenere la misura di AB occorre cambiare il segno del risultato. Ricordando la definizione di valore assoluto, possiamo scrivere

$$\boxed{\overline{AB} = |x_B - x_A|} \qquad \boxed{2}$$

Concludiamo che **la distanza tra due punti** di una retta, su cui sia fissato un sistema di coordinate, **è il valore assoluto della differenza delle loro ascisse.**

La $\boxed{2}$, ottenuta supponendo che i due punti seguano l'origine, resta valida anche se uno o entrambi i punti precedono l'origine, come in **FIGURA 12** dove è $x_A = -2$ e $x_B = 4$.

RICORDA!

Per i numeri reali continua a valere la definizione di **valore assoluto** valida per gli interi relativi e per i razionali. Se a è un numero reale si ha:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{per } a \geq 0 \\ -a & \text{per } a < 0 \end{cases}$$

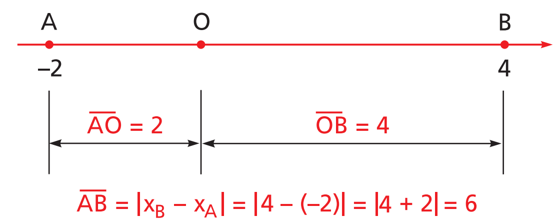


FIGURA 12

ESEMPIO

Determiniamo la distanza tra i punti P e Q, essendo $x_P = -\frac{5}{2}$ e $x_Q = -6$.

Applicando la $\boxed{2}$ otteniamo

$$\overline{PQ} = |x_Q - x_P| = \left|-6 - \left(-\frac{5}{2}\right)\right| = \left|-6 + \frac{5}{2}\right| = \left|\frac{-12+5}{2}\right| = \left|-\frac{7}{2}\right| = \frac{7}{2}$$

Calcolo approssimato

8 Approssimazione per difetto e approssimazione per eccesso

Operando con i numeri decimali, è sempre necessario utilizzare un numero limitato di cifre. In tale modo si commettono spesso degli inevitabili *errori di approssimazione*.

Se, ad esempio, in un calcolo si deve utilizzare un'espressione decimale del numero π, è necessario ricorrere a una sua *approssimazione*. Infatti il numero π è un numero irrazionale e pertanto la sua rappresentazione decimale è costituita di un numero infinito di cifre; perciò utilizzando al suo posto, ad esempio, il numero 3,14, si commette un errore di approssimazione. È perciò errato scrivere $\pi = 3{,}14$; bisogna piuttosto scrivere, servendosi del simbolo $\simeq$ di uguaglianza approssimata,

$$\pi \simeq 3{,}14$$

La relazione precedente si legge «π è uguale circa a 3,14» oppure «π è approssimativamente uguale a 3,14».

In generale, se nei calcoli con i numeri decimali si utilizza un valore a al posto di un numero c, si dice che a è un'**approssimazione** di c e, precisamente,

$a < c \longrightarrow a$ è un'**approssimazione per difetto** di c

$c < a \longrightarrow a$ è un'**approssimazione per eccesso** di c

9 Approssimazione ed errore assoluto

Operando con i numeri decimali, si commettono errori di approssimazione nei seguenti casi.

- Si utilizza un numero limitato di cifre decimali di un numero che ha infinite cifre decimali dopo la virgola, o comunque «troppe»; è ciò che avviene, ad esempio, quando si sostituisce il numero π con 3,14 o quando si utilizza il numero decimale 0,33 al posto della frazione $\frac{1}{3}$.
- Si eseguono calcoli con dati risultanti dalla misura di grandezze fisiche; infatti le misure di tali grandezze non possono mai essere esatte.

Se si sostituisce un numero c con una sua approssimazione a, si dice che si commette un **errore assoluto** dato da

$$\boxed{e = |c - a|}$$

DEFINIZIONE **ERRORE ASSOLUTO**

Si dice errore assoluto dell'approssimazione a di un numero c il valore assoluto della differenza tra il numero c e la sua approssimazione a.

Spesso non è possibile determinare esattamente l'errore assoluto da cui è affetta l'approssimazione a di un numero c, ma si può sapere che tale errore è minore di un certo numero $\varepsilon > 0$:

$$|c - a| = e < \varepsilon$$

Si dice che ε è una *maggiorazione dell'errore*.

ESEMPI

1 Se al posto del numero $\pi = 3{,}1415926\ldots$ usiamo la sua approssimazione 3,14, commettiamo un'errore assoluto pari a

$$e = |\pi - 3{,}14| = 0{,}00159\ldots$$

Essendo $3{,}14 < \pi$ diremo che 3,14 è un'approssimazione per difetto di π.

2 Il numero 0,667 è un'approssimazione della frazione $\frac{2}{3}$, affetta da un errore assoluto pari a

$$e = \left|\frac{2}{3} - 0{,}667\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{667}{1000}\right| = \frac{1}{3000}$$

Essendo $\frac{2}{3} < 0{,}667$, preciseremo che 0,667 è un'approssimazione per eccesso di $\frac{2}{3}$.

3 Se misuriamo, in centimetri, l'altezza della pagina di questo libro con una riga graduata, otteniamo un valore certamente approssimato. Infatti lo strumento utilizzato è in grado di valutare con precisione centimetri e millimetri, ma non i sottomultipli del millimetro. In questo caso non è possibile dire esattamente qual è l'errore assoluto commesso. Ritenendo esatti i centimetri e i millimetri, possiamo però affermare che l'errore della misura, espressa in centimetri, è inferiore a 0,1; si ha quindi

$$e < 0{,}1$$

In questo caso la *maggiorazione dell'errore* è $\varepsilon = 0{,}1$.

10 Errore relativo

L'errore assoluto non è molto indicativo dell'accuratezza con cui è stata eseguita una misura o della precisione dell'approssimazione di un numero. Se si commette un errore di un centimetro nel misurare la lunghezza di un tavolo, senz'altro giudichiamo che la misurazione è stata effettuata in modo grossolano. Lo stesso errore nella misura della distanza media Terra-Luna sarebbe invece indice di eccezionale accuratezza. È perciò utile il concetto di **errore relativo**.

DEFINIZIONE ERRORE RELATIVO

Si dice errore relativo dell'approssimazione a di un numero c il rapporto tra l'errore assoluto e il valore assoluto dell'approssimazione a.

Indicando con e_r l'errore relativo, si ha quindi

$$\boxed{e_r = \frac{e}{|a|} = \frac{|c-a|}{|a|}} \qquad \boxed{1}$$

Dalla $\boxed{1}$, ricordando la definizione di divisione, si ricava

$$\boxed{e = e_r \cdot |a|}$$

ossia: l'*errore assoluto è il prodotto dell'errore relativo per il valore assoluto dell'approssimazione*.

Gli errori relativi si esprimono spesso mediante percentuali: dire che una certa approssimazione è affetta da un errore relativo del 5% equivale a dire che il rapporto tra errore assoluto e valore assoluto dell'approssimazione è $\frac{5}{100}$. In generale, per esprimere un errore relativo e_r in forma percentuale basta moltiplicare per 100 tale errore.

Quando l'errore relativo non è noto, ma si sa che esso è inferiore a un certo numero $\varepsilon_r > 0$, ossia che

$$e_r < \varepsilon_r$$

si dice che ε_r è *una maggiorazione dell'errore relativo*.

ESEMPIO

L'approssimazione 1,4 del numero $\sqrt{2}$ è affetta da un errore relativo pari a $e_r = \frac{|\sqrt{2} - 1{,}4|}{1{,}4} \simeq 0{,}01$.

Essendo $0{,}01 = \frac{1}{100}$, diremo che tale errore relativo è dell'1%.

11 Valore abbreviato alla *n*-esima cifra decimale

Il modo più semplice e più usato, per ottenere un'approssimazione di un numero scritto in forma decimale, è quello di sopprimere tutte le cifre che seguono una data cifra. Se sopprimiamo le cifre del numero c che seguono la n-esima cifra dopo la virgola, otteniamo il valore **abbreviato** o **troncato** alla n-esima cifra decimale dopo la virgola. Nel seguito sottintenderemo l'indicazione «dopo la virgola».

Tale valore abbreviato è un'approssimazione di c a meno di $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$.

ESEMPIO

1 L'approssimazione del numero $\pi = 3{,}1415926...$, abbreviata alla terza cifra decimale, si ottiene sopprimendo tutte le cifre che seguono la terza cifra dopo la virgola:

$$\pi \simeq 3{,}141$$

Il numero 3,141 è un'approssimazione di π a meno di un millesimo.

Talvolta di un numero sono note alcune cifre dopo la virgola: se ne conosce cioè un valore abbreviato, senza che siano note le cifre successive. Così, nell'esempio del **PARAGRAFO 5** abbiamo determinato *soltanto* le prime due cifre dopo la virgola di $\sqrt{2}$, cioè abbiamo determinato il valore di $\sqrt{2}$ abbreviato alla seconda cifra decimale:

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}41$$

Qual è l'errore da cui è affetta tale approssimazione? Se non conosciamo esattamente le cifre decimali di $\sqrt{2}$, non possiamo neppure calcolare quelle dell'errore assoluto $e = |\sqrt{2} - 1{,}41|$.
Osserviamo però la **FIGURA 13**. Poiché il punto P, che rappresenta il numero $\sqrt{2}$, deve cadere nel segmento AB, la lunghezza del segmento AP, che rappresenta l'errore assoluto e, dev'essere minore della lunghezza del segmento AB, la cui misura è 0,01. Quindi l'approssimazione $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$ è affetta da un errore assoluto minore di $0{,}01 = 10^{-2}$.

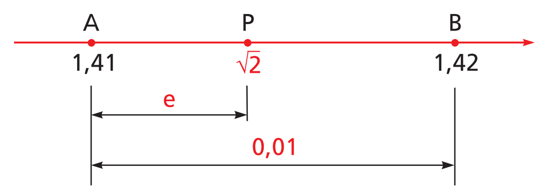


FIGURA 13

In generale, l'approssimazione a_n, valore abbreviato alla n-esima cifra decimale di un numero $c > 0$, è un'approssimazione per difetto, affetta da un errore assoluto inferiore a

$$\underbrace{0{,}00...01}_{n \text{ cifre}} = \frac{1}{10^n} = 10^{-n}$$

Si ha perciò:

$$e < 10^{-n}$$

ESEMPIO

2 Il valore di π abbreviato alla terza cifra decimale, ossia 3,141, è un'approssimazione per difetto affetta da un errore minore di $10^{-3} = 0{,}001$. Verifichiamolo:

$$e = |\pi - 3{,}141| = |3{,}1415926... - 3{,}141| = 0{,}0005926... < 0{,}001$$

12 Valore arrotondato alla *n*-esima cifra decimale

Se si vuole sostituire a un numero c una sua approssimazione dotata di un prefissato numero di cifre dopo la virgola, non sempre il valore abbreviato di c costituisce la scelta migliore.
Si voglia per esempio un'approssimazione di π dotata di tre cifre dopo la virgola. Sappiamo già che 3,141 è il valore abbreviato alla terza cifra decimale. Osserviamo la **FIGURA 14**. Come puoi vedere, il punto medio M del segmento AB corrisponde al numero 3,1415.

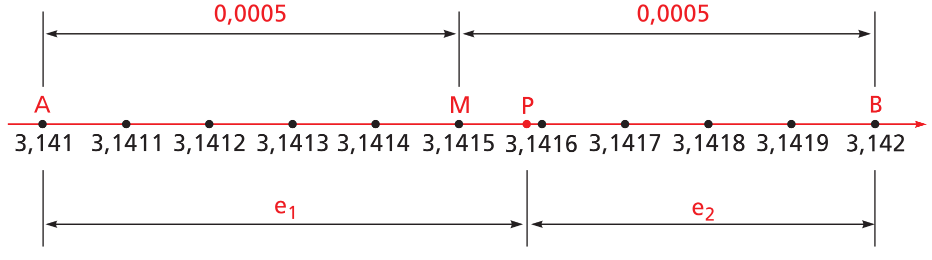


FIGURA 14

Essendo

$$\pi = 3{,}1415926... > 3{,}1415$$

il punto P che corrisponde a π cade nel segmento MB e quindi risulta più vicino al punto B che al punto A. Ciò significa che il numero 3,142 approssima π meglio del valore abbreviato 3,141, pur avendo lo stesso numero di cifre dopo la virgola.

In effetti $a_1 = 3{,}141$ è un'approssimazione per difetto affetta da un errore

$$e_1 = |\pi - 3{,}141| = 0{,}0005926...$$

mentre $a_2 = 3{,}142$ è un'approssimazione per eccesso affetta da un errore

$$e_2 = |\pi - 3{,}142| = 0{,}0004073...$$

e quindi si ha

$$e_2 < e_1$$

Perciò approssimando π con 3,142 si commette un errore più piccolo di quello che si commetterebbe scegliendo come approssimazione il valore abbreviato 3,141. In generale vale la seguente regola.

Regola

Per trovare il numero, dotato di n cifre decimali dopo la virgola, che approssima meglio un dato numero c si procede così:

- se la prima cifra che segue la n-esima cifra dopo la virgola è minore o uguale a 4, si sceglie come approssimazione il valore abbreviato alla n-esima cifra decimale;
- se invece la prima cifra che segue la n-esima cifra dopo la virgola è maggiore o uguale a 5, si sceglie come approssimazione il valore abbreviato alla n-esima cifra decimale, aumentandone di un'unità l'ultima cifra.

L'approssimazione così determinata si dice **valore arrotondato alla *n*-esima cifra decimale**. Tale approssimazione, come si desume sempre dalla FIGURA 14, è affetta da un errore assoluto che non può essere superiore a

$$\underbrace{0{,}00...0}_{n \text{ zeri}}5 = 0{,}5 \cdot 10^{-n}$$

ESEMPI

1 Determiniamo il valore di $\sqrt{2} = 1{,}4142136...$ arrotondato alla quarta cifra decimale.

Poiché la quinta cifra dopo la virgola è 1, assumiamo come valore arrotondato il valore abbreviato alla quarta cifra decimale:

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}4142$$

Osserva che, in questo caso, valore arrotondato e valore abbreviato coincidono.

2 Determiniamo il valore di $\sqrt{24} = 4{,}898979...$ arrotondato alla seconda cifra decimale.

Poiché la terza cifra dopo la virgola è 8, assumiamo come valore arrotondato il valore abbreviato alla seconda cifra decimale, aumentando quest'ultima di un'unità:

$$\begin{array}{r} 4{,}89 \\ 1 \\ \hline 4{,}90 \end{array}$$

Perciò l'approssimazione cercata è 4,90. Osserva che è necessario tener conto del riporto alla prima cifra decimale. Inoltre è opportuno lasciare scritto lo 0 dopo il 9, per ricordare che 4,90 è un'approssimazione alla seconda cifra decimale.

Se volessimo poi il valore di $\sqrt{24}$ arrotondato alla terza cifra decimale, avremmo 4,899.

13 L'accumulazione degli errori nei calcoli

È evidente che, se si eseguono calcoli con valori approssimati, si ottengono risultati approssimati. In generale, però, gli errori da cui sono affetti i risultati possono essere maggiori degli errori da cui sono affetti i valori dati. Se, ad esempio, svolgiamo dei calcoli utilizzando dei valori abbreviati, ossia esatti fino a una certa cifra decimale, non è detto che nel risultato che così si ottiene siano esatte le stesse cifre decimali.

ESEMPIO

Calcoliamo $\pi+\sqrt{3}$ utilizzando valori abbreviati alla quarta cifra decimale, ossia

$$\pi \simeq 3{,}1415 \qquad \sqrt{3} \simeq 1{,}7320$$

Otteniamo

$$\pi+\sqrt{3} \simeq 4{,}8735$$

In realtà, come puoi verificare operando con un maggior numero di cifre decimali, si ha

$$\pi+\sqrt{3} = 4{,}8736435...$$

e quindi il valore di $\pi+\sqrt{3}$ abbreviato alla quarta cifra decimale è 4,8736 e non 4,8735.

In conclusione, operando con valori esatti fino alla quarta cifra decimale, abbiamo qui ottenuto un risultato che è esatto solo fino alla terza cifra decimale.

14 La teoria degli errori

Lo studio delle relazioni tra gli errori dei dati e gli errori dei risultati è oggetto di una disciplina molto complessa, detta **teoria degli errori**, su cui non ci possiamo soffermare. Ci limitiamo perciò a fare alcune semplici considerazioni, traducendole quindi in consigli di immediata utilità pratica.
L'errore da cui è affetto il risultato di un calcolo dipende in generale da due cause:

A l'errore da cui sono affetti i dati;

B il numero di operazioni necessarie per ottenere il risultato.

Perciò, se si desidera ottenere un risultato con un certo numero di cifre decimali esatte, occorre in generale eseguire i calcoli con un maggior numero di cifre decimali esatte.
Se si deve eseguire una semplice addizione o sottrazione, è sufficiente che i dati abbiano una cifra decimale esatta in più rispetto a quelle richieste nel risultato.
Se invece si deve eseguire un calcolo complesso, che comporta l'esecuzione di svariate operazioni elementari, occorre che i dati abbiano diverse cifre decimali esatte in più rispetto a quelle richieste nel risultato.