UNITÀ 3

Numeri razionali

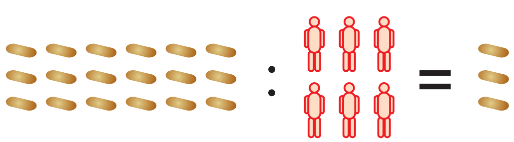
- Frazioni
- Numeri razionali
- Operazioni con i numeri razionali
- Potenza di un numero razionale
- Espressioni
- Frazioni e numeri decimali
- Proporzioni
- Percentuali

Frazioni

1 Introduzione

Sappiamo che i numeri naturali non consentono di eseguire le sottrazioni nei casi in cui il sottraendo è maggiore del minuendo. Per tale motivo è stato necessario introdurre i numeri interi relativi. Ma anche i numeri interi relativi non sono sufficienti a risolvere tutti i problemi. Immaginiamo la seguente situazione: se dobbiamo dividere 18 biscotti tra 6 bambini, quanti biscotti riceverà ciascun bambino (FIGURA 1)?
La risposta è molto semplice: a ciascun bambino spetteranno $18 : 6 = 3$ biscotti.

Ma se, invece di 18 biscotti, dovessimo dividere 2 torte tra 6 bambini? Sappiamo che negli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ la divisione $2 : 6$ non si può eseguire (FIGURA 2).



18 biscotti divisi tra 6 bambini =
= 3 biscotti per ogni bambino

FIGURA 1

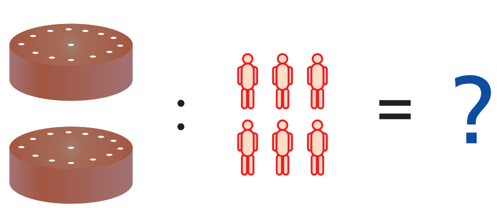


FIGURA 2

PREREQUISITI

Occorre conoscere gli argomenti delle **UNITÀ 1** e **2**, ossia i numeri naturali e i numeri interi relativi, le operazioni con essi e le loro proprietà, le potenze e le proprietà delle potenze con esponente naturale.
È bene possedere, anche solo a livello intuitivo, i concetti di insieme e di sottoinsieme.

OBIETTIVI

Conoscenze

- Concetto di frazione, significato di relazione di equivalenza tra frazioni e concetto di numero razionale
- Ordinamento dei numeri razionali e loro rappresentazione su una retta orientata
- Definizioni e proprietà delle operazioni tra numeri razionali e delle potenze con esponente intero
- Rappresentazione decimale dei numeri razionali
- Proporzioni e loro proprietà, concetto di percentuale

Abilità

- Ridurre ai minimi termini una frazione
- Confrontare e ordinare numeri razionali
- Eseguire le operazioni con i numeri razionali e calcolare le potenze con esponente intero positivo o negativo
- Trasformare una frazione in numero decimale e viceversa
- Determinare un termine incognito in una proporzione
- Eseguire calcoli con le percentuali

Ma sappiamo anche che c'è un semplice modo per risolvere il problema. Basta tagliare ciascuna delle 2 torte in 6 fette uguali. Risulteranno 12 fette che si potranno dividere tra i 6 bambini (**FIGURA 3**), ciascuno dei quali avrà 2 fette.

I numeri naturali e gli interi relativi non permettono di esprimere questa semplice soluzione del nostro problema. In situazioni come questa si deve ricorrere alle *frazioni* o, per essere più precisi, ai *numeri razionali*. In questo modo potremo dire che a ogni bambino spetteranno $\frac{2}{6}$ di torta, cioè $\frac{1}{3}$ di torta.

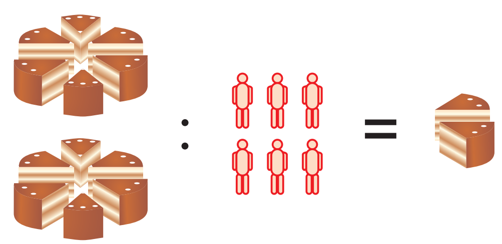


FIGURA 3

2 Frazioni

Una **frazione** indica il risultato di una divisione, ossia il **quoto** o **rapporto** tra due numeri interi. In casi come quello esposto nel precedente paragrafo è sufficiente considerare rapporti tra numeri naturali. Ma in questo modo si otterrebbero solo frazioni positive: si ripresenterebbe il problema dell'impossibilità di eseguire alcune sottrazioni che abbiamo già incontrato nell'insieme dei numeri naturali. Per questo motivo considereremo, da subito, frazioni che esprimono rapporti tra numeri interi relativi.

La parola **frazione** deriva dal latino *fractio*, che a sua volta deriva dal verbo *frangere* (spezzare, rompere); indica la porzione di un tutto, ossia di un'unità o di un numero intero, che è stato suddiviso in diverse parti.

DEFINIZIONE FRAZIONE

Una frazione è un'espressione del tipo $\frac{n}{d}$ o n/d che indica il risultato della divisione tra i numeri interi relativi n e d, con $d \neq 0$.

I numeri n e d si chiamano **termini** della frazione; precisamente il numero n, che si trova al di sopra della *linea di frazione*, si chiama **numeratore** e il numero d, che si trova al di sotto della linea di frazione, si chiama **denominatore**.

IMPORTANTE

Una frazione rappresenta il risultato di una divisione tra numeri interi. Ma, come sappiamo, non è possibile dividere per zero; quindi

il denominatore di una frazione deve essere diverso da zero

Nel seguito faremo, spesso implicitamente, l'ipotesi che i denominatori delle frazioni che consideriamo siano diversi da zero.

- Il termine **numeratore** deriva dal verbo *numerare*, ossia contraddistinguere con un numero: ti basti pensare alle poltrone numerate in un teatro o ai posti numerati in uno stadio. Nella frazione il numeratore indica quante parti vengono prese tra quelle in cui è stata suddivisa l'unità.
- La parola **denominatore** deriva dal verbo *denominare*, ossia dare un nome che renda riconoscibile l'oggetto di cui si parla. Il denominatore dà il nome alla frazione stessa, perché indica in quante parti è stata suddivisa l'unità: $\frac{1}{27}$, $\frac{5}{27}$, ... si leggono un *ventisettesimo*, cinque *ventisettesimi*, ... per indicare che l'unità è stata suddivisa in *ventisette* parti, di cui se ne prendono, rispettivamente, una, cinque, ...

Se il numeratore è multiplo del denominatore, la frazione rappresenta il risultato di una divisione che si può eseguire nell'insieme dei numeri interi. Ad esempio, la frazione $\frac{9}{3}$ rappresenta la divisione $9:3$ che, come sappiamo, dà come risultato 3. In casi come questo non è necessario ricorrere a una frazione per rappresentare il risultato. Tali **frazioni** si dicono perciò **apparenti**.
In particolare, se il denominatore è uguale a 1, si usa scrivere la frazione senza il denominatore. Ad esempio: $\frac{5}{1}=5$, $\frac{-6}{1}=-6$. In generale

$$\frac{a}{1}=a$$

3 Frazioni equivalenti

Una frazione indica un quoto, ossia il risultato di una divisione; ma possiamo ottenere uno stesso risultato da diverse divisioni. Dobbiamo dunque aspettarci che frazioni diverse possano rappresentare lo stesso quoto. Pensiamo, ad esempio, alla situazione che abbiamo esaminato nel PARAGRAFO 1: per dividere 2 torte tra 6 bambini possiamo dividere ciascuna torta in 6 fette e dare 2 di queste a ogni bambino, oppure possiamo dividere ciascuna torta in 3 fette e dare una fetta a ogni bambino. Nel primo caso ogni bambino riceverà $\frac{2}{6}$ di torta, mentre nel secondo riceverà $\frac{1}{3}$ di torta. Ma in entrambi i casi la quantità di torta ricevuta sarà la stessa, quindi possiamo dire che $\frac{2}{6}$ e $\frac{1}{3}$ rappresentano lo stesso quoto. Per questo motivo si dice che le frazioni $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ sono **equivalenti**.

DEFINIZIONE FRAZIONI EQUIVALENTI

Due frazioni $\frac{n_1}{d_1}$ e $\frac{n_2}{d_2}$ si dicono equivalenti se si ha $n_2 \cdot d_1 = n_1 \cdot d_2$.

Due frazioni sono pertanto equivalenti se il prodotto tra il numeratore della seconda per il denominatore della prima è uguale al prodotto tra il numeratore della prima per il denominatore della seconda.
Per indicare l'equivalenza tra due frazioni si usa il simbolo di uguaglianza; ad esempio si scrive $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$.

I due prodotti che si devono confrontare per stabilire se due frazioni sono equivalenti sono detti anche *prodotti in croce*; il motivo di questa denominazione è subito chiaro osservando il seguente schema:

$$\frac{n_1}{d_1} = \frac{n_2}{d_2}$$

$$n_2 \cdot d_1 \qquad = \qquad n_1 \cdot d_2$$

Ad esempio le frazioni $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ sono equivalenti perché si ha

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

$$2 \cdot 3 \qquad = \qquad 1 \cdot 6$$

Analogamente risulta

$$\frac{7}{9} = \frac{147}{189} \quad \text{perché} \quad \underbrace{147 \cdot 9}_{1323} = \underbrace{7 \cdot 189}_{1323}$$

La relazione di equivalenza delle frazioni gode delle seguenti proprietà.

- **Riflessiva**. Ogni frazione è equivalente a se stessa.
- **Simmetrica**. Se $\frac{m}{n}$ è equivalente a $\frac{p}{q}$, allora $\frac{p}{q}$ è equivalente a $\frac{m}{n}$.
- **Transitiva**. Se due frazioni sono entrambe equivalenti a una terza frazione, allora sono equivalenti tra loro.

4 Segno di una frazione

- Se i termini di una frazione sono concordi, il quoto rappresentato dalla frazione è positivo. In questo caso si usa indicare la frazione scrivendola con numeratore e denominatore positivi, senza farli precedere dal segno. Eventualmente si può scrivere il segno + davanti alla frazione, anche se di solito si omette.
- Se invece i termini di una frazione sono discordi, il quoto rappresentato dalla frazione è negativo. In questo caso si indica la frazione scrivendola con numeratore e denominatore positivi, senza farli precedere dal segno, e scrivendo il segno − davanti alla frazione.

RICORDA!

In generale si conviene di scrivere

- le *frazioni positive* nella forma
  $\frac{m}{n}$ con $m > 0,\ n > 0$
- le *frazioni negative* nella forma
  $-\frac{p}{q}$ con $p > 0,\ q > 0$

- Se il numeratore di una frazione è 0 (e il denominatore è diverso da 0), la frazione rappresenta un quoto nullo (frazione nulla). Le frazioni nulle sono tutte tra loro equivalenti e si possono indicare con il numero 0.

ESEMPI

1 $\frac{+7}{+3} = +\frac{7}{3} = \frac{7}{3} \qquad \frac{-7}{-3} = +\frac{7}{3} = \frac{7}{3}$

2 $\frac{+9}{-20} = -\frac{9}{20} \qquad \frac{-9}{+20} = -\frac{9}{20}$

3 $\frac{0}{5} = \frac{0}{12} = -\frac{0}{3} = 0$

■ Ribadiamo che le frazioni con denominatore uguale a zero non hanno senso.
Ad esempio, **non hanno significato** le scritture

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{1}{0} \qquad \frac{3}{0} \qquad \frac{-5}{0} \qquad \text{ecc.}$$

5 Proprietà invariantiva

Poiché una frazione rappresenta un quoto, ossia il risultato di una divisione, è naturale estendere la proprietà invariantiva della divisione anche alle frazioni.

■ **Proprietà invariantiva delle frazioni**. Moltiplicando o dividendo entrambi i termini di una frazione per uno stesso numero diverso da zero, si ottiene una frazione equivalente alla frazione data:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a : c}{b : c} \qquad c \neq 0}$$

ESEMPI

1 Consideriamo la frazione $\frac{2}{6}$. Dividendo per 2 sia il numeratore sia il denominatore, otteniamo:

$$\frac{2}{6} = \frac{2 : \mathbf{2}}{6 : \mathbf{2}} = \frac{1}{3} \quad \longrightarrow \quad \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Le frazioni $\frac{2}{6}$ e $\frac{1}{3}$ sono equivalenti: infatti $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$.

2 Consideriamo la frazione $\frac{7}{2}$. Moltiplicando entrambi i suoi termini per 5, otteniamo:

$$\frac{7}{2} = \frac{7 \cdot \mathbf{5}}{2 \cdot \mathbf{5}} \quad \longrightarrow \quad \frac{7}{2} = \frac{35}{10}$$

Le frazioni $\frac{7}{2}$ e $\frac{35}{10}$ sono equivalenti: infatti $35 \cdot 2 = 7 \cdot 10$.

6 Riduzione ai minimi termini

Consideriamo la frazione $\frac{12}{30}$. Il *MCD* dei suoi termini è 6. Ciò significa che sia il numeratore sia il denominatore sono divisibili per 6. Perciò, per la proprietà invariantiva, si ha

$$\frac{12}{30} = \frac{12 : 6}{30 : 6} = \frac{2}{5}$$

I termini della frazione equivalente così ottenuta hanno *MCD* uguale a 1 (cioè sono primi tra loro) e quindi non si può trovare un'altra frazione, equivalente alla data, i cui termini siano, in valore assoluto, più piccoli. Si dice che la frazione è stata **ridotta ai minimi termini**.

DEFINIZIONE **FRAZIONE RIDOTTA AI MINIMI TERMINI**

Una frazione si dice ridotta ai minimi termini o *irriducibile* se il *MCD* dei valori assoluti dei suoi termini è 1.

■ In generale, per ridurre una frazione ai minimi termini si dividono sia il numeratore sia il denominatore per il *MCD* dei loro valori assoluti.

■ Per stabilire se due frazioni sono equivalenti si può applicare la definizione data nel PARAGRAFO 3 oppure si possono ridurre entrambe le frazioni ai minimi termini, come nel prossimo esempio **3**.

ESEMPI

1 Riduciamo ai minimi termini la frazione $\frac{36}{54}$.

Si ha $MCD(36\,;54)=18$. Dividiamo per 18 sia il numeratore sia il denominatore della frazione data; si ha $36:18=2$, $54:18=3$. Quindi è

$$\frac{36}{54}=\frac{2}{3}$$

Di solito si scrive $\frac{\cancel{36}^{\,2}}{\cancel{54}_{\,3}}=\frac{2}{3}$.

2 Riduciamo ai minimi termini la frazione $\frac{32}{24}$.

Scomponiamo in fattori primi i termini della frazione:

$$\frac{32}{24}=\frac{2^5}{2^3\cdot 3}$$

Vediamo in questo modo che il MCD dei termini della frazione è 2^3. Dividendo numeratore e denominatore per 2^3 si ha rispettivamente:

$2^5:2^3=2^{5-3}=2^2$ $\longrightarrow$ si applica una proprietà delle potenze

$(2^3\cdot 3):2^3=3$ $\longrightarrow$ si è diviso un prodotto per uno dei suoi fattori

Possiamo eseguire la semplificazione in questo modo:

$$\frac{32}{24}=\frac{2^{\cancel{5}\,2}}{\cancel{2^3}_{\,1}\cdot 3}=\frac{2^2}{3}=\frac{4}{3}$$

3 Vogliamo stabilire se le frazioni $\frac{15}{9}$ e $\frac{20}{12}$ sono equivalenti.

Riduciamo entrambe le frazioni ai minimi termini.

- Per la prima frazione si ha $MCD(15\,;9)=3$ e quindi $\frac{15}{9}=\frac{15:3}{9:3}=\frac{5}{3}$.
- Per la seconda frazione si ha $MCD(20\,;12)=4$ e quindi $\frac{20}{12}=\frac{20:4}{12:4}=\frac{5}{3}$.

Dunque le due frazioni sono equivalenti a $\frac{5}{3}$ e perciò sono equivalenti tra loro. Possiamo scrivere

$$\frac{15}{9}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$$

OSSERVAZIONE

Semplificare una frazione significa dividere i suoi termini per un divisore comune. Ad esempio, dividendo per 2 i termini della frazione 36/54 otteniamo

$$\frac{36}{54}=\frac{36:2}{54:2}=\frac{18}{27}$$

Naturalmente avremmo anche potuto semplificare la frazione dividendo i suoi termini per 3 o per 6 o per 9 o per 18.

Di solito quando si semplifica una frazione si conviene di dividere i suoi termini per il loro *MCD*, in modo che la frazione equivalente che si ottiene sia ridotta ai minimi termini:

$$\frac{36}{54}=\frac{36:18}{54:18}=\frac{2}{3}$$

7 Riduzione al minimo comune denominatore

Per confrontare, sommare o sottrarre due o più frazioni, occorre che esse abbiano lo stesso denominatore che, di solito, si conviene sia positivo. È possibile esprimere due o più frazioni con lo stesso denominatore in infiniti modi, ma è preferibile che il denominatore comune sia il più piccolo possibile, cioè che sia il **minimo comune denominatore** delle frazioni date.

Regola

Per **ridurre due o più frazioni al minimo comune denominatore**, si procede così:

A si riducono le frazioni ai minimi termini, se possibile;

B si calcola il *mcm* dei denominatori delle frazioni ridotte: esso è il *minimo comune denominatore*;

C si moltiplica il numeratore di ciascuna frazione ridotta per il quoto tra il minimo comune denominatore e il corrispondente denominatore; si ottiene così il numeratore di ciascuna nuova frazione. Il denominatore sarà il minimo comune denominatore prima trovato.

ESEMPI

1 Riduciamo al minimo comune denominatore le seguenti frazioni:

$$\frac{7}{15} \qquad \frac{6}{20} \qquad \frac{12}{18}$$

A Se possibile, riduciamo le frazioni ai minimi termini; risulta

$$MCD(7\,;15)=1 \qquad MCD(6\,;20)=2 \qquad MCD(12\,;18)=6$$

Perciò la prima frazione è irriducibile, mentre per le altre si ha

$$\frac{6}{20}=\frac{6:2}{20:2}=\frac{3}{10} \qquad \frac{12}{18}=\frac{12:6}{18:6}=\frac{2}{3}$$

B Calcoliamo il minimo comune multiplo dei denominatori delle tre frazioni ridotte, ossia delle frazioni

$$\frac{7}{15} \qquad \frac{3}{10} \qquad \frac{2}{3}$$

Si ha $mcm(15\,;10\,;3)=30$. Quindi 30 è il minimo comune denominatore delle tre frazioni.

C Calcoliamo, per ciascuna delle tre frazioni ridotte, il quoto tra il minimo comune denominatore 30 e il corrispondente denominatore, moltiplicandone poi il numeratore per il quoto così ottenuto. Scriviamo infine le tre frazioni che hanno tali prodotti come numeratori e hanno i denominatori tutti uguali al minimo comune denominatore **30**:

$$\frac{7}{15} \longrightarrow \mathbf{30}:15=2 \longrightarrow 7\cdot 2=14 \longrightarrow \frac{7}{15}=\frac{14}{\mathbf{30}}$$

$$\frac{3}{10} \longrightarrow \mathbf{30}:10=3 \longrightarrow 3\cdot 3=9 \longrightarrow \frac{3}{10}=\frac{9}{\mathbf{30}}$$

$$\frac{2}{3} \longrightarrow \mathbf{30}:3=10 \longrightarrow 2\cdot 10=20 \longrightarrow \frac{2}{3}=\frac{20}{\mathbf{30}}$$

In conclusione, le tre frazioni ridotte al minimo comune denominatore sono

$$\frac{14}{30} \qquad \frac{9}{30} \qquad \frac{20}{30}$$

2 Riduciamo al minimo comune denominatore le seguenti frazioni:

$$-\frac{4}{35} \qquad \frac{15}{14} \qquad -3$$

Osserviamo che il numero intero -3 può essere considerato una frazione apparente con denominatore 1, cioè

$$-3=-\frac{3}{1}$$

Procediamo come nell'esempio precedente.

A Tutte le frazioni date sono irriducibili.

B $mcm(35\,;14\,;1)=70$

C $-\frac{4}{35} \longrightarrow 70:35=2 \longrightarrow 4\cdot 2=8 \longrightarrow -\frac{4}{35}=-\frac{8}{70}$

$\frac{15}{14} \longrightarrow 70:14=5 \longrightarrow 15\cdot 5=75 \longrightarrow \frac{15}{14}=\frac{75}{70}$

$-3=-\frac{3}{1} \longrightarrow 70:1=70 \longrightarrow 3\cdot 70=210 \longrightarrow -3=-\frac{210}{70}$

In conclusione, le tre frazioni ridotte al minimo comune denominatore sono

$$-\frac{8}{70} \qquad \frac{75}{70} \qquad -\frac{210}{70}$$

Numeri razionali

8 Definizione di numero razionale

Data una frazione, esistono infinite altre frazioni equivalenti a essa. Tali frazioni, per la proprietà transitiva, sono tutte equivalenti tra loro. Ad esempio, si ha

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}=\frac{10}{15}=\dots$$

Tutte queste frazioni costituiscono un insieme che prende il nome di **numero razionale**.

DEFINIZIONE NUMERO RAZIONALE

Si chiama numero razionale l'insieme di tutte le frazioni equivalenti a una data frazione.

Per indicare un numero razionale si utilizza una frazione, scelta tra tutte quelle che compongono tale insieme, preferibilmente quella ridotta ai minimi termini.

L'insieme dei numeri razionali si indica con il simbolo $\mathbb{Q}$.

Per comprendere meglio la definizione, consideriamo la FIGURA 4. Ogni cassetto contiene infinite frazioni, tutte equivalenti tra loro, e quindi rappresenta un numero razionale. Sullo sportello di ciascun cassetto è raffigurata una frazione, che è stata scelta per indicare quel numero razionale. Come abbiamo già detto, è preferibile scegliere una frazione irriducibile, anche se tale scelta non è obbligata. La cassettiera, intesa come insieme di infiniti cassetti, rappresenta l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

La parola **razionale** deriva dall'aggettivo latino *rationalis*, che a sua volta deriva da *ratio*; questo termine significa «ragione», ma anche «rapporto», «proporzione».
È appunto in questa accezione che viene usato in matematica: i numeri razionali sono quelli che indicano un rapporto, ossia un quoto, il risultato di una divisione. Osserviamo che da tale accezione di *ratio* derivano alcune parole italiane, come «razione», «razionare», «razionamento», e anche alcune locuzioni: ad esempio «in ragione di uno su quattro» significa «in proporzione di 1/4».

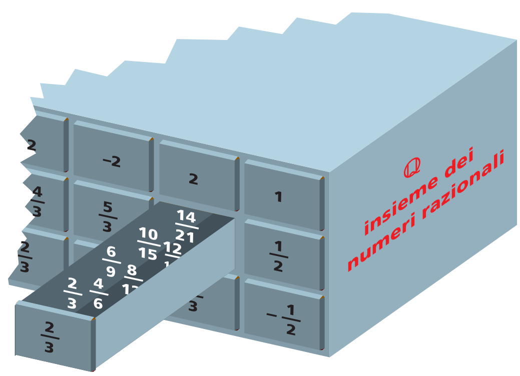


FIGURA 4

ESEMPIO

Consideriamo il seguente insieme di frazioni:

$$\left\{\frac{2}{3};\frac{4}{6};\frac{6}{9};\frac{8}{12};\frac{10}{15};\dots\right\}$$

Come abbiamo già visto, tali frazioni sono tutte equivalenti tra loro. L'insieme considerato costituisce quindi un numero razionale. Questo numero razionale si può indicare con una qualsiasi delle frazioni dell'insieme, ma è preferibile utilizzare la frazione $\frac{2}{3}$, che è irriducibile.

Quindi $\frac{2}{3}$ rappresenta il numero razionale $\left\{\frac{2}{3};\frac{4}{6};\frac{6}{9};\dots\right\}$.

ATTENZIONE!

Anche se per indicare i numeri razionali si utilizzano delle frazioni, **un numero razionale non è una frazione, ma un insieme di frazioni, tutte equivalenti tra loro**.

9 Segno di un numero razionale

Due frazioni equivalenti hanno lo stesso segno. Quindi le frazioni, tutte equivalenti tra loro, il cui insieme costituisce un numero razionale, sono o tutte positive o tutte negative o tutte nulle.
Nel primo caso diremo che il numero razionale è positivo, nel secondo caso diremo che è negativo.
Consideriamo ora il terzo caso: *l'insieme delle frazioni nulle è il numero razionale* 0; quindi lo zero non è considerato né positivo né negativo.

Si possono estendere ai numeri razionali alcune definizioni già incontrate nella precedente unità sui numeri interi.

- Due numeri razionali si dicono **concordi** se hanno lo stesso segno.
- Due numeri razionali si dicono **discordi** se hanno segni diversi.

ESEMPI

1 L'insieme delle frazioni equivalenti a $+\frac{2}{3}$ è

$$\left\{+\frac{2}{3}\,;+\frac{4}{6}\,;+\frac{6}{9}\,;+\frac{8}{12}\,;+\frac{10}{15}\,;\ldots\right\}$$

Queste frazioni sono tutte positive e il loro insieme costituisce il numero razionale positivo che è in genere rappresentato dalla frazione $+\frac{2}{3}$.

Come abbiamo già detto, il segno + davanti alle frazioni positive viene di solito omesso.

2 L'insieme delle frazioni equivalenti a $-\frac{15}{6}$ è

$$\left\{-\frac{5}{2}\,;-\frac{10}{4}\,;-\frac{15}{6}\,;-\frac{20}{8}\,;-\frac{25}{10}\,;\ldots\right\}$$

Queste frazioni sono tutte negative e il loro insieme costituisce il numero razionale negativo che può essere rappresentato dalla frazione $-\frac{5}{2}$.

3 L'insieme delle frazioni nulle, tutte equivalenti tra loro, è

$$\left\{\frac{0}{1}\,;\frac{0}{2}\,;\frac{0}{3}\,;\frac{0}{4}\,;\frac{0}{5}\,;\ldots\right\}$$

Il loro insieme costituisce il numero razionale 0.

10 Sottoinsiemi dell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali

Consideriamo il numero razionale costituito da tutte le frazioni equivalenti a $-3=-\frac{3}{1}$, ossia

$$\left\{-\frac{3}{1}\,;-\frac{6}{2}\,;-\frac{9}{3}\,;-\frac{12}{4}\,;\ldots\right\}$$

È naturale identificare tale frazione con il numero intero relativo -3.
Analogamente, a ogni numero intero relativo a corrisponde un numero razionale, costituito dall'insieme delle frazioni, tutte apparenti, equivalenti ad $a=\frac{a}{1}$. Questi numeri razionali costituiscono un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$, che può essere identificato con $\mathbb{Z}$. Possiamo perciò dire che $\mathbb{Z}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$: scriveremo $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$ e leggeremo «$\mathbb{Z}$ è contenuto in $\mathbb{Q}$». Ricordando poi che l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali può essere considerato un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$, possiamo scrivere

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$$

Possiamo rappresentare tali relazioni mediante un diagramma come quello in **FIGURA 5**.
Diremo che tali relazioni sono *inclusioni proprie*: questo significa che esistono numeri razionali che non sono interi ed esistono numeri interi che non sono naturali.

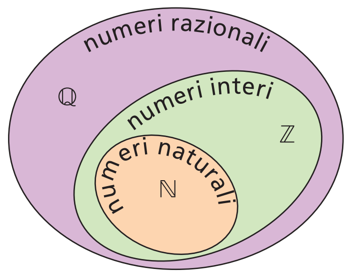


FIGURA 5

Oltre ai sottoinsiemi ora considerati, è talvolta utile considerare l'insieme dei numeri razionali positivi, che si indica con il simbolo $\mathbb{Q}^+$, e l'insieme formato dai numeri razionali positivi e dallo 0, che si indica con il simbolo $\mathbb{Q}_0^+$.

11 Numeri razionali e frazioni

Come abbiamo visto per i numeri naturali e per i numeri interi, anche i numeri razionali si possono confrontare e ordinare e con essi si possono eseguire le usuali operazioni aritmetiche.
Operazioni e confronti tra numeri razionali si eseguono operando sulle frazioni che li rappresentano nei modi che definiremo nei prossimi paragrafi, ma è importante comprendere che i risultati che si ottengono sono indipendenti dalle frazioni scelte per rappresentare i numeri razionali.
Per capire tale concetto, consideriamo il seguente esempio, basato su una semplice addizione di frazioni: conosci già questa operazione dai tuoi studi precedenti (vedi anche il prossimo **PARAGRAFO 17**).
Consideriamo dunque la somma

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{6}{3}$$

Sostituiamo ora alle frazioni addendi due frazioni a esse equivalenti, ad esempio $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ e $\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$.
La somma diviene

$$\frac{4}{6}+\frac{8}{6}=\frac{12}{6}$$

Gli addendi sono due numeri razionali. Possiamo rappresentare il primo addendo indifferentemente con la frazione $\frac{2}{3}$, con la frazione $\frac{4}{6}$, o con qualsiasi altra frazione equivalente. Analogamente il secondo addendo può essere rappresentato dalla frazione $\frac{4}{3}$, da $\frac{8}{6}$ o da qualsiasi altra frazione equivalente. Qualunque sia la scelta, la somma che si ottiene è comunque una frazione che rappresenta sempre lo stesso numero razionale: infatti si ha

$$\frac{6}{3}=\frac{12}{6}=2$$

La situazione è rappresentata in **FIGURA 6**: possiamo scegliere una qualsiasi frazione contenuta nel cassetto «$\frac{2}{3}$» e una qualsiasi contenuta nel cassetto «$\frac{4}{3}$». In tutti i casi la loro somma è una frazione contenuta nel cassetto «2».

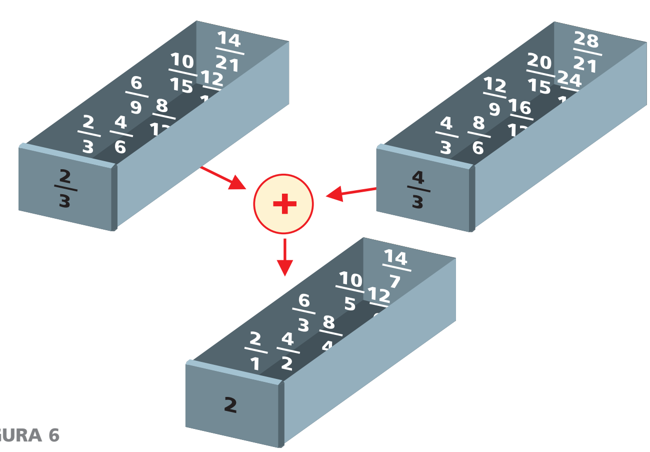


FIGURA 6

In definitiva, per eseguire un calcolo con i numeri razionali si utilizzano frazioni che li rappresentano: il risultato è un numero razionale che non dipende dalle frazioni scelte.

12 Opposto di un numero razionale

DEFINIZIONE **OPPOSTO**

Si dice opposto di un numero razionale a, e si indica con $-a$, il numero razionale che si ottiene cambiando il segno di a.

Osserviamo che il numero $-a$ è positivo se a è negativo, mentre è negativo se a è positivo:

$$a > 0 \longrightarrow -a < 0 \qquad a < 0 \longrightarrow -a > 0$$

ESEMPI

1 L'opposto di $\frac{3}{4}$ è $-\frac{3}{4}$; l'opposto di $-\frac{8}{5}$ è $+\frac{8}{5}$ ossia $\frac{8}{5}$: ricordiamo che i numeri positivi si possono indicare senza farli precedere dal segno.

2 Se $a = \frac{5}{12}$ allora $-a = -\frac{5}{12}$; se $a = -\frac{9}{7}$ allora $-a = \frac{9}{7}$.

13 Valore assoluto di un numero razionale

Analogamente a quanto visto per i numeri interi relativi, possiamo dare la seguente definizione.

DEFINIZIONE **VALORE ASSOLUTO**

Si dice valore assoluto di un numero razionale a, e si indica con $|a|$, il numero a stesso se a è positivo o nullo, il suo opposto $-a$ se a è negativo.
In simboli

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}}$$

ESEMPI

1 Il valore assoluto di $\frac{3}{4}$ è $\frac{3}{4}$. Il valore assoluto di $-\frac{8}{5}$ è $-\left(-\frac{8}{5}\right) = +\frac{8}{5} = \frac{8}{5}$.

2 $\left|-\frac{35}{12}\right| = \frac{35}{12}$; $\quad \left|+\frac{3}{7}\right| = \frac{3}{7}$; $\quad \left|\frac{2}{4}\right| = \frac{1}{2}$; $\quad |0| = 0$

3 Se $a = -\frac{25}{11}$ allora $|a| = \frac{25}{11}$.
Se $x = +\frac{1}{3}$ allora $|x| = \frac{1}{3}$ e anche $|-x| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$.

14 Rappresentazione dei numeri razionali

L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali può essere rappresentato su una retta. A tale scopo scegliamo un punto A sulla retta, cui associamo il numero 0: il punto è detto *origine*. Fissiamo poi un segmento di lunghezza $\boldsymbol{u}$, che sarà l'*unità di misura* delle lunghezze, e scegliamo un *verso* di percorrenza sulla retta: parleremo così di **retta orientata**.
Per fissare le idee immaginiamo che la retta sia tracciata orizzontalmente su un foglio e che il verso prescelto, evidenziato da una punta di freccia, sia quello che va da sinistra a destra.

- Dato un numero razionale positivo, rappresentato dalla frazione $\frac{m}{n}$, gli associamo il punto della retta determinato nel modo seguente. Dividiamo il segmento di lunghezza $\boldsymbol{u}$, unità di misura, in n parti uguali: sia $\boldsymbol{u}'$ la lunghezza di una di tali parti. Disponiamo quindi sulla retta, a partire dal punto A e procedendo verso destra, m segmenti consecutivi, ciascuno di lunghezza uguale a $\boldsymbol{u}'$. L'ultimo estremo dell'ultimo segmento rappresenta il punto associato al numero razionale $\frac{m}{n}$ dato.
- Se invece vogliamo determinare il punto della retta associato al numero razionale negativo $-\frac{m}{n}$, procediamo nello stesso modo, ma spostandoci nel verso opposto a quello indicato dalla freccia, ossia da destra a sinistra.

ESEMPIO

Rappresentiamo su una retta orientata i numeri $\frac{5}{4}$ e $-\frac{3}{4}$.

Fissiamo sulla retta l'origine *A* e il verso di percorrenza (da sinistra a destra), indicato dalla freccia (**FIGURA 7**). Scegliamo quindi il segmento di lunghezza $\boldsymbol{u}$, unità di misura (in arancio). Dividiamo poi il segmento in 4 parti uguali, ottenendo il segmento di lunghezza $\boldsymbol{u}'$ (in verde). Quindi disponiamo consecutivamente 5 segmenti di lunghezza uguale a $\boldsymbol{u}'$, a partire da *A* verso destra. L'ultimo estremo dell'ultimo di tali segmenti è il punto associato a $\frac{5}{4}$.

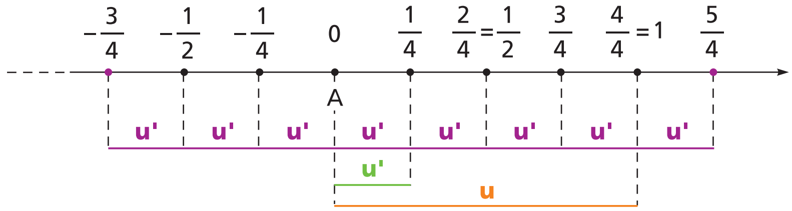


FIGURA 7

Osserviamo che, procedendo in questo modo, abbiamo anche determinato i punti associati ai numeri razionali $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ e 1. Applicando lo stesso metodo, ma procedendo verso sinistra anziché verso destra, possiamo determinare anche il punto associato a $-\frac{3}{4}$.

15 Confronto tra numeri razionali

- Nell'insieme dei numeri razionali è possibile definire le stesse relazioni di disuguaglianza che abbiamo già incontrato studiando i numeri naturali e i numeri interi. In particolare ricordiamo che
  - lo zero è maggiore di qualsiasi numero negativo e minore di qualsiasi numero positivo;
  - un numero negativo è sempre minore di un numero positivo;
  - tra due numeri positivi il minore è quello che ha il minore valore assoluto;
  - tra due numeri negativi il minore è quello che ha il maggiore valore assoluto.
- Per confrontare due numeri razionali concordi, occorre innanzitutto esprimerli come frazioni con lo stesso denominatore positivo; si confrontano quindi i loro numeratori, considerando negativi i numeratori delle frazioni negative. Tale relazione di disuguaglianza è anche la relazione tra le due frazioni e quindi tra i due numeri razionali.

ESEMPI

1 Confrontiamo i numeri $\frac{25}{12}$ e $\frac{20}{9}$.

Il minimo comune denominatore è $mcm(12\,;9)=36$. Esprimiamo quindi i due numeri dati mediante frazioni con denominatore 36:

$$\frac{25}{12}=\frac{25\cdot 3}{12\cdot 3}=\frac{75}{36} \qquad \frac{20}{9}=\frac{20\cdot 4}{9\cdot 4}=\frac{80}{36}$$

Poiché risulta $75<80$, si ha $\frac{25}{12}<\frac{20}{9}$.

2 Confrontiamo i numeri $-\frac{9}{20}$ e $-\frac{7}{15}$.

Il minimo comune denominatore è $mcm(20\,;15)=60$. Considerando che i due numeri sono entrambi negativi, esprimiamoli mediante frazioni con denominatore 60 e numeratore negativo:

$$-\frac{9}{20}=\frac{-27}{60} \qquad -\frac{7}{15}=\frac{-28}{60}$$

Poiché risulta $-27>-28$, si ha $-\frac{9}{20}>-\frac{7}{15}$.

3 Confrontiamo i numeri $\frac{14}{9}$ e $-\frac{9}{14}$.

In questo caso non è necessario eseguire calcoli: il numero negativo è minore del numero positivo:

$$-\frac{9}{14}<\frac{14}{9}$$

4 Scriviamo in ordine crescente i seguenti numeri:

$$-3 \qquad \frac{4}{5} \qquad 2 \qquad -\frac{17}{4} \qquad \frac{10}{13}$$

I numeri negativi devono precedere quelli positivi. Cominciamo quindi a confrontare -3 e $-\frac{17}{4}$.

Si ha $-3=-\frac{12}{4}$ e quindi, essendo $-17<-12$, è $-\frac{17}{4}<-\frac{12}{4}=-3$.

Per confrontare i numeri positivi, scriviamoli come frazioni con lo stesso denominatore 65:

$$\frac{4}{5}=\frac{52}{65} \qquad 2=\frac{130}{65} \qquad \frac{10}{13}=\frac{50}{65}$$

Essendo $50<52<130$, risulta $\frac{10}{13}=\frac{50}{65}<\frac{4}{5}=\frac{52}{65}<2=\frac{130}{65}$.

I numeri dati, scritti in ordine crescente, sono quindi

$$-\frac{17}{4} \qquad -3 \qquad \frac{10}{13} \qquad \frac{4}{5} \qquad 2$$

16 Proprietà dell'insieme dei numeri razionali

L'insieme dei numeri razionali gode delle seguenti proprietà.

- L'insieme dei numeri razionali è infinito.
- L'insieme dei numeri razionali non ha un elemento minimo.
- L'insieme dei numeri razionali non ha un elemento massimo.
- Tra due numeri razionali sono compresi infiniti numeri razionali.

Osserviamo che, rispetto alle proprietà degli insiemi dei numeri naturali e dei numeri interi, c'è un'importante differenza: i concetti di «precedente» e di «successivo» non hanno senso nell'insieme dei numeri razionali. Infatti un'importante proprietà dell'insieme $\mathbb{Q}$ è che **tra due qualsiasi numeri razionali sono sempre compresi infiniti altri numeri razionali**. Tale proprietà si esprime dicendo che **l'insieme dei numeri razionali è denso**. Invece si dice che *gli insiemi dei numeri naturali e dei numeri interi sono insiemi discreti*: questo significa che tra un numero naturale (o intero relativo) e il suo successivo non vi sono altri numeri naturali (o interi relativi).

Operazioni con i numeri razionali

17 Addizione

L'addizione, che si indica con il simbolo $+$, è un'operazione che si esegue tra due numeri, detti **addendi**. Il risultato dell'addizione si chiama **somma**.

Per eseguire l'addizione tra due numeri razionali è necessario che questi siano espressi da frazioni che abbiano lo stesso denominatore positivo e i numeratori con lo stesso segno delle rispettive frazioni.

DEFINIZIONE **SOMMA DI FRAZIONI**

La somma di due frazioni con lo stesso denominatore positivo è la frazione che ha per denominatore lo stesso denominatore delle frazioni date e per numeratore la somma algebrica dei numeratori:

$$\boxed{\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}}$$

Regola

Per **sommare due o più frazioni** si procede così:

A si riducono le frazioni prima ai minimi termini e poi al minimo comune denominatore positivo;

B si scrive la frazione che ha per denominatore il denominatore comune prima trovato e al numeratore si indica la somma dei numeratori prima trovati (i numeratori delle frazioni positive si scrivono con il segno $+$, i numeratori delle frazioni negative si scrivono con il segno $-$);

C si calcola la somma indicata al numeratore;

D se possibile, si riduce ai minimi termini la frazione ottenuta.

L'addizione tra numeri razionali gode delle proprietà ormai note.

- **Proprietà commutativa**: $a+b=b+a$
- **Proprietà associativa**: $a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)$
- **Elemento neutro**: $a+0=0+a=a$

Come già sappiamo, le proprietà commutativa e associativa ci permettono di indicare addizioni fra tre o più addendi e di eseguirle cambiando l'ordine degli addendi e associandoli a piacimento.

ESEMPI

1 Calcoliamo $\frac{2}{15}+\frac{10}{12}$.

Riduciamo gli addendi 2/15 e 10/12 prima ai minimi termini e poi al minimo comune denominatore:

$$\frac{2}{15}+\frac{\cancel{10}^{\,5}}{\cancel{12}_{\,6}}=\frac{2}{15}+\frac{5}{6}=\frac{4}{30}+\frac{25}{30}$$

Scriviamo la frazione che ha per denominatore 30 e per numeratore la somma dei numeratori; calcoliamo poi la somma indicata al numeratore:

$$\frac{4}{30}+\frac{25}{30}=\frac{4+25}{30}=\frac{29}{30}$$

2 Calcoliamo $\frac{7}{18}+\left(-\frac{5}{9}\right)+(-2)$.

Osserviamo che -2 può essere considerato una frazione apparente con denominatore 1. Le frazioni sono irriducibili. Il minimo comune denominatore è 18:

$$\frac{7}{18}+\left(-\frac{5}{9}\right)+\left(-\frac{2}{1}\right)=\frac{7}{18}+\left(-\frac{10}{18}\right)+\left(-\frac{36}{18}\right)$$

Scriviamo ora la frazione che ha al denominatore 18 e al numeratore la somma dei numeratori; nota che i numeratori della seconda e della terza frazione, che sono negative, devono essere scritti con il segno $-$:

$$\frac{7}{18}+\left(-\frac{10}{18}\right)+\left(-\frac{36}{18}\right)=\frac{7+(-10)+(-36)}{18}$$

Calcoliamo quindi la somma indicata al numeratore e riduciamo ai minimi termini la frazione ottenuta:

$$\frac{7+(-10)+(-36)}{18}=\frac{-39}{18}=-\frac{13}{6}$$

18 Sottrazione

La sottrazione, che si indica con il simbolo $-$, è un'operazione che si esegue tra due numeri, considerati nell'ordine, il primo detto **minuendo** e il secondo **sottraendo**. Il risultato della sottrazione si chiama **differenza**.

DEFINIZIONE **DIFFERENZA DI FRAZIONI**

La differenza di due frazioni è la somma della prima con l'opposta della seconda:

$$\boxed{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}=\frac{m}{n}+\left(-\frac{p}{q}\right)}$$

- Anche nell'insieme dei numeri razionali la sottrazione gode della **proprietà invariantiva**:

$$a-b=(a\pm c)-(b\pm c)$$

ESEMPI

1 Calcoliamo $\frac{4}{15}-\frac{20}{12}$.

Applicando la definizione trasformiamo la sottrazione in un'addizione:

$$\frac{4}{15}-\frac{20}{12}=\frac{4}{15}+\left(-\frac{20}{12}\right)$$

Quindi procediamo come negli esempi del **PARAGRAFO 17**:

$$\frac{4}{15}+\left(-\frac{20}{12}\right)=\frac{4}{15}+\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{4}{15}+\left(-\frac{25}{15}\right)=\frac{4+(-25)}{15}=\frac{-21}{15}=-\frac{7}{5}$$

2 Calcoliamo $-\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Procediamo come nell'esempio **1**:

$$-\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=-\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{-2+3}{6}=\frac{1}{6}$$

19 Somma algebrica

Come abbiamo visto nel **PARAGRAFO 18**, una sottrazione tra numeri razionali può essere considerata un'addizione. Possiamo perciò estendere ai numeri razionali il concetto di **somma algebrica**, introdotto nell'**UNITÀ 2** a proposito dei numeri interi relativi.

Regola Per calcolare la **somma algebrica di due o più frazioni**, si procede così:

- **A** si riducono le frazioni date prima ai minimi termini e poi al minimo comune denominatore positivo;
- **B** si scrive la frazione che ha per denominatore il denominatore comune prima trovato, e al numeratore si indica la somma algebrica dei numeratori prima determinati (i numeratori delle frazioni positive si scrivono con il segno $+$, i numeratori delle frazioni negative si scrivono con il segno $-$);
- **C** si calcola la somma algebrica indicata al numeratore;
- **D** se possibile, si riduce ai minimi termini la frazione ottenuta.

ESEMPIO

Calcoliamo la somma algebrica $\frac{15}{18}-\frac{8}{32}+\frac{5}{12}-1$.

Riduciamo ai minimi termini le frazioni:

$$\frac{15}{18}-\frac{8}{32}+\frac{5}{12}-1=\frac{5}{6}-\frac{1}{4}+\frac{5}{12}-\frac{1}{1}$$

Il minimo comune denominatore è $mcm(6\,;4\,;12\,;1)=12$, quindi

$$\frac{5}{6}-\frac{1}{4}+\frac{5}{12}-\frac{1}{1}=\frac{10-3+5-12}{12}=\frac{0}{12}=0$$

20 Moltiplicazione

La moltiplicazione, che indichiamo con il simbolo $\cdot$, è un'operazione che si esegue tra due numeri, detti **fattori**. Il risultato della moltiplicazione si chiama **prodotto**.

DEFINIZIONE PRODOTTO DI FRAZIONI

Il prodotto di due frazioni è la frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori:

$$\boxed{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}}$$

Il segno del prodotto è determinato dalla consueta regola dei segni.

La moltiplicazione nell'insieme dei numeri razionali gode delle solite proprietà.

- **Proprietà commutativa**: $a\cdot b=b\cdot a$
- **Proprietà associativa**: $a\cdot b\cdot c=(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
- **Proprietà distributiva** *rispetto all'addizione* o *alla sottrazione*:
  $a\cdot(b\pm c)=a\cdot b\pm a\cdot c$
- **Elemento neutro**: $a\cdot 1=1\cdot a=a$
- **Elemento annullatore**: $a\cdot 0=0\cdot a=0$
- **Legge di annullamento del prodotto**:

se $a\cdot b=0$ **allora** $a=0$ oppure $b=0$ o anche $a=b=0$

Supponendo che le frazioni positive siano scritte nella forma $\frac{m}{n}$, con m ed n positivi, e le frazioni negative nella forma $-\frac{p}{q}$, con p e q positivi, per eseguire la moltiplicazione tra due o più frazioni applicheremo la seguente regola.

Regola Per calcolare il **prodotto di due o più frazioni**, si procede così:

A si riducono ai minimi termini quei fattori che eventualmente non lo siano;

B si determina il segno del prodotto ricordando la regola dei segni: se il numero dei fattori negativi è pari il prodotto è positivo, se tale numero è dispari il prodotto è negativo; la frazione prodotto ha per segno il segno così determinato, per numeratore il prodotto dei numeratori dei fattori e per denominatore il prodotto dei loro denominatori;

C se possibile, si semplifica il risultato riducendolo ai minimi termini.

ESEMPI

1 $\left(+\frac{2}{7}\right)\cdot\left(+\frac{3}{5}\right)=+\frac{2\cdot 3}{7\cdot 5}=\frac{6}{35}$ $\qquad$ $\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=+\frac{2\cdot 3}{5\cdot 8}=\frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{40}_{\,20}}=\frac{3}{20}$

2 $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{4}{3}=-\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}=-\frac{8}{9}$ $\qquad$ $3\cdot\left(-\frac{4}{11}\right)=\frac{3}{1}\cdot\left(-\frac{4}{11}\right)=-\frac{3\cdot 4}{1\cdot 11}=-\frac{12}{11}$

3 $\underbrace{\frac{6}{10}\cdot\frac{2}{7}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{5}}_{\text{riduciamo ai minimi termini}}\cdot\frac{2}{7}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{3\cdot 2\cdot 3}{5\cdot 7\cdot 5}=-\frac{18}{175}$

Nella pratica è possibile, in molti casi, eseguire le **semplificazioni in croce** prima di calcolare il prodotto dei numeratori e quello dei denominatori. In tal modo è possibile ottenere il risultato già ridotto ai minimi termini. I prossimi esempi chiariranno questo modo di procedere.

ESEMPI

4 $\frac{2}{9}\cdot\frac{18}{7}=\frac{2\cdot\cancel{18}^{\,2}}{{}_1\cancel{9}\cdot 7}=\frac{4}{7}$ o anche $\frac{2}{{}_1\cancel{9}}\cdot\frac{\cancel{18}^{\,2}}{7}=\frac{4}{7}$

5 $\underbrace{-\frac{24}{14}\cdot\left(-\frac{21}{16}\right)=-\frac{\cancel{24}^{\,12}}{\cancel{14}_{\,7}}}_{\text{riduciamo ai minimi termini}}\cdot\left(-\frac{21}{16}\right)=-\frac{\cancel{12}^{\,3}}{\cancel{7}_{\,1}}\cdot\left(-\frac{\cancel{21}^{\,3}}{\cancel{16}_{\,4}}\right)=+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}$

6 Calcoliamo $\left(-\frac{64}{75}\right)\cdot\frac{125}{48}$.

Per eseguire le semplificazioni in croce può essere utile, come in questo caso, scomporre in fattori primi i termini delle frazioni:

$$\left(-\frac{64}{75}\right)\cdot\frac{125}{48}=\left(-\frac{2^{\cancel{6}\,2}}{3\cdot\cancel{5^2}_{\,1}}\right)\cdot\frac{\cancel{5^3}^{\,1}}{3\cdot\cancel{2^4}_{\,1}}=\left(-\frac{2^2}{3}\right)\cdot\frac{5}{3}=-\frac{2^2\cdot 5}{3\cdot 3}=-\frac{20}{9}$$

7 Calcoliamo $E=\left(+\frac{6}{24}\right)\cdot\left(-\frac{36}{7}\right)\cdot\left(-\frac{28}{96}\right)\cdot\left(+\frac{15}{18}\right)$.

Osserviamo che la prima, la terza e la quarta frazione si possono ridurre ai minimi termini. In questo caso non procediamo a tali riduzioni e operiamo invece come segue:

$$E=+\frac{6\cdot 36\cdot 28\cdot 15}{24\cdot 7\cdot 96\cdot 18}=\frac{2\cdot 3\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 7\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3\cdot 7\cdot 2^5\cdot 3\cdot 2\cdot 3^2}=\frac{\cancel{2^5}^{\,1}\cdot\cancel{3^4}^{\,1}\cdot 5\cdot\cancel{7}^{\,1}}{{}_{2^4}\cancel{2^9}\cdot{}_1\cancel{3^4}\cdot{}_1\cancel{7}}=\frac{5}{2^4}=\frac{5}{16}$$

8 $5\cdot\left(-\frac{9}{20}\right)=\frac{\cancel{5}^{\,1}}{1}\cdot\left(-\frac{9}{\cancel{20}_{\,4}}\right)=-\frac{9}{4}$ $\qquad$ $\frac{3}{8}\cdot 4=\frac{3}{\cancel{8}_{\,2}}\cdot\frac{\cancel{4}^{\,1}}{1}=\frac{3}{2}$

Da quanto visto nell'esempio 8 possiamo dedurre che per moltiplicare un numero intero per una frazione si moltiplica il solo numeratore per quel numero intero:

$$n \cdot \frac{p}{q} = \frac{n \cdot p}{q}$$

È possibile semplificare il numero intero con il denominatore della frazione.

21 Numeri reciproci

DEFINIZIONE NUMERI RECIPROCI

Due numeri razionali a e b si dicono reciproci se il loro prodotto è 1:

$$\boxed{a \cdot b = 1}$$

Se a e b sono due numeri reciproci, diremo che a è il **reciproco** (o **inverso**) di b e che b è il reciproco (o inverso) di a.
Poiché lo zero è l'elemento annullatore della moltiplicazione, dalla definizione data possiamo dedurre che se due numeri sono reciproci, nessuno dei due può essere 0.

Possiamo ora fare le seguenti osservazioni.

- Il reciproco di un numero positivo è positivo e il reciproco di un numero negativo è negativo.
- Il reciproco di 1 è 1 e il reciproco di -1 è -1.
- Il reciproco di $\frac{m}{n}$ è $\frac{n}{m}$ e viceversa, con $n \neq 0$ ed $m \neq 0$: infatti $\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = 1$. In particolare n e $\frac{1}{n}$ sono reciproci.
- Il reciproco di $-\frac{m}{n}$ è $-\frac{n}{m}$ e viceversa, con $n \neq 0$ ed $m \neq 0$: infatti $-\frac{m}{n} \cdot \left(-\frac{n}{m}\right) = 1$. In particolare $-n$ e $-\frac{1}{n}$ sono reciproci.
- **Non esiste il reciproco di 0**. Infatti 0 è l'elemento annullatore della moltiplicazione e quindi risulta $0 \cdot x = 0$ per qualsiasi x; è perciò impossibile determinare x in modo che il prodotto $0 \cdot x$ sia uguale a 1.

ATTENZIONE!

Sarebbe **grave errore** affermare che il reciproco di 0 è $\frac{1}{0}$! Come abbiamo già detto più volte, l'espressione $\frac{1}{0}$ non ha infatti significato.

ESEMPI

1. I numeri razionali espressi dalle frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$ sono numeri reciproci. Infatti $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$.
2. I numeri $-\frac{5}{3}$ e $-\frac{3}{5}$ sono reciproci perché $-\frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = 1$.
3. Il reciproco di $\frac{7}{8}$ è $\frac{8}{7}$; il reciproco di $-\frac{2}{11}$ è $-\frac{11}{2}$; il reciproco di 4 è $\frac{1}{4}$; il reciproco di -3 è $-\frac{1}{3}$; il reciproco di $-\frac{1}{7}$ è -7; il reciproco di $\frac{1}{8}$ è 8.

22 Divisione

La divisione tra due numeri razionali è un'operazione che si esegue tra due numeri, considerati nell'ordine, il primo detto **dividendo** e il secondo **divisore**. Il risultato della divisione è il **quoto** o **quoziente**.

DEFINIZIONE QUOZIENTE

Il quoto o quoziente di due numeri razionali, il secondo dei quali diverso da zero, è il prodotto del primo per il reciproco del secondo:

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} \qquad \text{con } n \neq 0,\ q \neq 0,\ p \neq 0$$

Il segno del risultato di una divisione si determina, come al solito, con la regola dei segni.

ESEMPI

1 $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$ $\qquad$ $\frac{3}{5} : \frac{8}{15} = \frac{3}{\cancel{5}_1} \cdot \frac{\cancel{15}^3}{8} = \frac{9}{8}$

Anche nel caso dei numeri razionali, il quoziente di due numeri è un terzo numero che, moltiplicato per il secondo, dà il primo. Ad esempio, nella prima delle due divisioni si ha

$$\frac{\cancel{14}^2}{\cancel{15}_3} \cdot \frac{\cancel{5}^1}{\cancel{7}_1} = \frac{2}{3}$$

2 $\frac{18}{25} : \left(-\frac{12}{35}\right) = \frac{\cancel{18}^3}{\cancel{25}_5} \cdot \left(-\frac{\cancel{35}^7}{\cancel{12}_2}\right) = -\frac{21}{10}$ $\qquad$ $-\frac{2}{3} : \left(-\frac{5}{7}\right) = +\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$

Nella prima di queste due divisioni, il secondo passaggio poteva anche essere scritto $-\frac{18}{25} \cdot \frac{35}{12}$, avendo subito stabilito che il quoziente doveva essere negativo.

3 $-\frac{1}{7} : \frac{1}{8} = -\frac{1}{7} \cdot \frac{8}{1} = -\frac{8}{7}$ $\qquad$ $3 : \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{1} \cdot \frac{4}{1} = -12$

Anche in $\mathbb{Q}$ **non è possibile dividere per 0**. A parte questa limitazione, nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali sono possibili tutte le divisioni con divisore diverso da 0.
Ricordiamo infine che il quoziente di una divisione tra numeri interi può essere rappresentato da un numero razionale.

OSSERVAZIONE

L'addizione, la sottrazione e la moltiplicazione sono operazioni ovunque definite in $\mathbb{Q}$. Poiché anche in $\mathbb{Q}$ non è possibile dividere per 0, la divisione non è ovunque definita in $\mathbb{Q}$. Possiamo però affermare che la divisione è ovunque definita nell'insieme $\mathbb{Q}^*$ dei numeri razionali con l'esclusione dello 0.

ESEMPI

4 $3 : 5 = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $7 : 8 = \frac{7}{8}$ $\qquad$ $-2 : 18 = \frac{-2}{18} = -\frac{1}{9}$ $\qquad$ $3 : (-5) = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$

5 $\frac{22}{5} : (-4) = -\frac{\cancel{22}^{11}}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_2} = -\frac{11}{10}$ $\qquad$ $\frac{3}{4} : 7 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{28}$

6 $\frac{12}{5} : 4 = \frac{12}{5} : \frac{4}{1} = \frac{\cancel{12}^3}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_1} = \frac{3}{5}$ ossia $\frac{12}{5} : 4 = \frac{12 : 4}{5} = \frac{3}{5}$

Osserva che 4 è un divisore di 12.

Dall'esame degli esempi visti possiamo dedurre che per dividere una frazione per un numero intero, si moltiplica il denominatore per quel numero intero:

$$\frac{p}{q} : n = \frac{p}{q \cdot n}$$

In particolare, se il numero intero è divisore del numeratore, si divide il numeratore per quel numero intero:

$$\frac{p}{q} : n = \frac{p : n}{q}$$

La divisione tra numeri razionali gode delle proprietà invariantiva e distributiva, analogamente a quanto accade per i numeri naturali e per i numeri interi relativi.

- **Proprietà invariantiva**:

$$a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c) \qquad a : b = (a : c) : (b : c)$$

- **Proprietà distributiva** *rispetto all'addizione* o *alla sottrazione*:

$$(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$$

Come al solito, ciascuna delle divisioni indicate deve avere il divisore diverso da zero e la proprietà distributiva è applicabile solo per dividere una somma algebrica per un numero e non per dividere un numero per una somma algebrica.

- Infine, anche nel caso dei numeri razionali, **non** valgono né la *proprietà associativa* né la *proprietà commutativa*.

RICORDA!

Due o più divisioni successive vanno eseguite nell'ordine indicato:

$$a : b : c = (a : b) : c$$

23 La linea di frazione come simbolo della divisione

Nel PARAGRAFO 2 abbiamo definito le frazioni come espressioni che indicano i risultati di divisioni tra numeri interi relativi. Risulta perciò naturale utilizzare una frazione anche per indicare una divisione tra due numeri razionali a e b:

$$\frac{a}{b} = a : b \qquad \text{con } b \neq 0$$

Si possono pertanto scrivere *frazioni a termini frazionari*, come nei successivi esempi **1** e **2**. Per semplificarle, basta ricordare la definizione di divisione e moltiplicare il numeratore per il reciproco del denominatore.

Si dovrà ricordare che il numeratore e il denominatore di una frazione indicano rispettivamente il dividendo e il divisore della divisione. Pertanto, quando si esprime una frazione a termini frazionari come divisione, è opportuno, in alcuni casi, porre tra parentesi i termini della frazione. Ciò è particolarmente importante quando i termini sono delle espressioni, come nel prossimo esempio **2**.

In tal caso occorre anche tenere presente la gerarchia tra le linee di frazione, che è solitamente indicata dalla loro lunghezza (FIGURA 8).

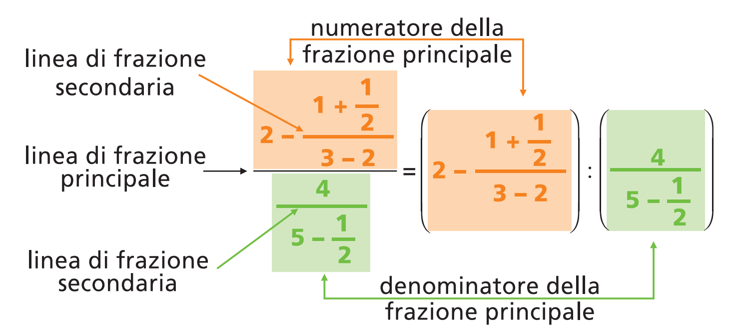


FIGURA 8

ESEMPI

1 linea di frazione secondaria; linea di frazione principale; linea di frazione secondaria

$$\frac{\frac{4}{15}}{\frac{8}{3}} = \frac{4}{15} : \frac{8}{3} = \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{10}$$

2 $$\frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) : \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3-4}{6} : \frac{4-1}{4} = -\frac{1}{6} : \frac{3}{4} = -\frac{1}{\cancel{6}_3} \cdot \frac{\cancel{4}^2}{3} = -\frac{2}{9}$$

3 $$\frac{\frac{2}{5}}{8} = \frac{2}{5} : 8 = \frac{\cancel{2}^1}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{8}_4} = \frac{1}{20}$$ $$\frac{-\frac{3}{7}}{-\frac{4}{11}} = +\frac{3}{7} \cdot \frac{11}{4} = \frac{33}{28}$$

4 $$\frac{1}{\frac{9}{4}} = 1 : \frac{9}{4} = 1 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$ $$\frac{1}{-\frac{2}{3}} = 1 : \left(-\frac{2}{3}\right) = 1 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

L'ultimo esempio ci suggerisce un nuovo modo per definire il reciproco di un numero razionale.

DEFINIZIONE RECIPROCO

Il reciproco (o *inverso*) di un numero razionale $a \neq 0$ è $\frac{1}{a}$.

Infatti, se al posto di a poniamo la frazione $\frac{m}{n}$, otteniamo

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{m}{n}} = 1 : \frac{m}{n} = 1 \cdot \frac{n}{m} = \frac{n}{m}$$

e, come sappiamo, $\frac{n}{m}$ è proprio il reciproco di $\frac{m}{n}$.

Potenza di un numero razionale

24 Potenza con esponente naturale

DEFINIZIONE POTENZA CON ESPONENTE NATURALE

La potenza che ha per base il numero razionale a e per esponente il numero naturale n si indica con a^n ed è uguale al prodotto di n fattori uguali ad a:

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fattori}}}$$

Anche per i numeri razionali si ha che

- $1^n = 1$; $0^n = 0$ con $n \neq 0$;
- $a^1 = a$; $a^0 = 1$ con $a \neq 0$;
- 0^0 non ha significato.

ESEMPI

1 $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3\cdot3\cdot3\cdot3}{2\cdot2\cdot2\cdot2} = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$

2 $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) = +\frac{2\cdot2}{5\cdot5} = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$

3 $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3\cdot3\cdot3}{4\cdot4\cdot4} = -\frac{3^3}{4^3} = -\frac{27}{64}$

4 $\left(\frac{8}{7}\right)^1 = \frac{8}{7}$ $\qquad \left(-\frac{21}{31}\right)^0 = 1$

Dall'esame dei precedenti esempi è facile dedurre la seguente regola.

Regola La **potenza di una frazione** è la frazione i cui termini sono le potenze dei termini della base. Se la base ha segno $+$, anche la potenza ha segno $+$; se invece la base ha segno $-$, la potenza ha segno $+$ se l'esponente è pari, ha segno $-$ se l'esponente è dispari.

Grazie a questa regola i calcoli con le potenze, come quelli nei precedenti esempi, si possono eseguire più rapidamente.

ESEMPI

5 $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$ $\qquad$ **6** $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 = +\frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$ $\qquad$ **7** $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{3^3}{4^3} = -\frac{27}{64}$

IMPORTANTE

- Osserviamo che le espressioni

$$-\left(\frac{3}{5}\right)^2 \quad \text{e} \quad \left(-\frac{3}{5}\right)^2$$

hanno significato diverso:

  - $-\left(\frac{3}{5}\right)^2$ indica l'opposto della potenza di esponente 2 della frazione positiva $\frac{3}{5}$:

$$-\left(\frac{3}{5}\right)^2 = -\left(\frac{3^2}{5^2}\right) = -\frac{9}{25}$$

  - $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$ indica la potenza di esponente 2 della frazione negativa $-\frac{3}{5}$:

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = +\frac{9}{25}$$

- Anche le due espressioni

$$\frac{2^3}{5} \quad \text{e} \quad \left(\frac{2}{5}\right)^3$$

hanno significato diverso:

  - $\frac{2^3}{5}$ è una frazione che ha 2^3 per numeratore e 5 per denominatore:

$$\frac{2^3}{5} = \frac{8}{5}$$

  - $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ è la potenza di esponente 3 della frazione $\frac{2}{5}$:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$$

Concludiamo che **l'uso delle parentesi è necessario sia per indicare la potenza di un numero negativo sia per indicare la potenza di una frazione**.

25 Proprietà delle potenze

Anche in $\mathbb{Q}$ le potenze godono delle proprietà già note e valide in $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{Z}$. Se a e b sono numeri razionali ed m ed n sono numeri naturali, si ha

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad a^m : a^n = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \qquad a^m : b^m = (a : b)^m$$

Ovviamente, come al solito, le potenze e le divisioni indicate devono avere significato.

Osserviamo infine che, come vedremo nel prossimo paragrafo, la proprietà $a^m : a^n = a^{m-n}$ vale nell'insieme $\mathbb{Q}$ anche se è $m < n$. In $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{Z}$, invece, tale proprietà valeva solo per $m \geq n$.

ESEMPI

1 $\left(-\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^4 = \left(-\frac{2}{5}\right)^{5+4} = \left(-\frac{2}{5}\right)^9$

Il risultato può anche essere espresso in altre forme, diverse ma tutte tra loro equivalenti, e precisamente:

$$-\left(\frac{2}{5}\right)^9 \quad \text{oppure} \quad -\frac{2^9}{5^9} \quad \text{oppure} \quad -\frac{512}{1.953.125}$$

Nei risultati delle espressioni è però preferibile lasciare indicate le potenze, piuttosto che usare numeri dalla scrittura troppo... estesa.

2 Per calcolare $\left(\frac{4}{3}\right)^7 : \left(-\frac{4}{3}\right)^4$, per prima cosa notiamo che le due potenze non hanno la stessa base, ma basi opposte. Non possiamo quindi sottrarre gli esponenti. Tuttavia ricordiamo che, indicando con $2n$ un generico esponente pari, si ha $(-a)^{2n} = (+a)^{2n}$. Possiamo quindi procedere così:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^7 : \left(-\frac{4}{3}\right)^4 = \left(\frac{4}{3}\right)^7 : \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \left(\frac{4}{3}\right)^{7-4} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27}$$

3 $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right]^6 = \left(-\frac{1}{3}\right)^{3 \cdot 6} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{18} = \left(\frac{1}{3}\right)^{18}$

$(-a)^{2n} = (+a)^{2n}$

Il risultato può anche essere espresso nella forma $\frac{1^{18}}{3^{18}}$, cioè $\frac{1}{3^{18}}$.

4 $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^4 = \left(-\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{3}_{1}} \cdot \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{16}_{8}}\right)^4 = \left(-\frac{1}{8}\right)^4 = \left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{1}{8^4}$

5 $-16^6 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^6 = -\left(\cancel{16}^{2} \cdot \frac{1}{\cancel{8}_{1}}\right)^6 = -2^6 = -64$

6 $\left(\frac{16}{25}\right)^7 \cdot \left(-\frac{15}{56}\right)^7 \cdot 5^7 = \left[\frac{16}{25} \cdot \left(-\frac{15}{56}\right) \cdot 5\right]^7 = \left(-\frac{6}{7}\right)^7 = -\left(\frac{6}{7}\right)^7$

7 $\left(-\frac{3}{5}\right)^5 : \left(\frac{6}{5}\right)^5 = \left(-\frac{3}{5} : \frac{6}{5}\right)^5 = \left(-\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6}\right)^5 = \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1^5}{2^5} = -\frac{1}{32}$

26 Potenza con esponente intero negativo

In $\mathbb{Q}$ è possibile definire le potenze con esponente intero negativo. Nel formulare la definizione considereremo come esponente l'opposto $-n$ di un numero naturale n.

DEFINIZIONE **POTENZA CON ESPONENTE INTERO NEGATIVO**

La potenza che ha per base il numero razionale $a \neq 0$ e per esponente il numero intero negativo $-n$ è uguale al reciproco della potenza che ha per base a e per esponente il numero naturale n:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a \neq 0 \tag{1}$$

- Dalla **1**, per $n = 1$, otteniamo

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

cioè **la potenza con esponente -1 di un numero razionale $a \neq 0$ è il reciproco del numero stesso**.

Osserviamo poi che, essendo $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$, la **1** diventa

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

cioè la potenza a^{-n} è uguale alla potenza di esponente n del reciproco della base. Se al posto di a si sostituisce $\frac{a}{b}$, l'ultima relazione diventa

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \qquad a \neq 0,\ b \neq 0} \qquad \mathbf{2}$$

In particolare, dalla **2** possiamo ricavare che

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n$$

- Tutte le proprietà delle potenze, viste all'inizio del **PARAGRAFO 25**, valgono anche per le potenze con esponente negativo; per verificarlo occorre utilizzare le proprietà delle potenze con esponente positivo e la definizione di potenza con esponente negativo.

A titolo di esempio dimostriamo che

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)} \quad \longrightarrow \quad a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m-n}$$

Infatti abbiamo

$$\underbrace{a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n}}_{\text{per la } 1} = \frac{1}{a^m \cdot a^n} = \underbrace{\frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)}}_{\text{per la } 1} = a^{-m-n}$$

Inoltre puoi verificare che

$$a^{-m} \cdot a^n = a^{-m+n} \qquad \text{e} \qquad a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$$

ESEMPI

1 $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ $\qquad (-2)^{-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$ $\qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$

2 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ $\qquad \left(-\frac{5}{2}\right)^{-1} = -\frac{2}{5}$ $\qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} = (-2)^4 = 16$

3 Applicando le proprietà delle potenze si ha

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{5}\right)^{3+(-5)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \mathbf{\frac{25}{4}}$$

Verifichiamo questo risultato procedendo in modo diverso:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^5 = \frac{2^3}{5^3} \cdot \frac{5^5}{2^5} = \frac{5^2}{2^2} = \mathbf{\frac{25}{4}}$$

4 $10^5 : 10^7 = 10^{5-7} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

5 $\left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4-(-2)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$

6 $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{(-2)\cdot(-3)} = \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{6}}$

Verifichiamo questo risultato procedendo in modo diverso:

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-3} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\right]^{-3} = \left(\frac{3^2}{2^2}\right)^{-3} = \left(\frac{2^2}{3^2}\right)^{3} = \frac{(2^2)^3}{(3^2)^3} = \frac{2^6}{3^6} = \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{6}}$$

7 $\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^{2}\right]^{-3} : \left(-\frac{2}{5}\right)^{-4} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{-6} : \left(-\frac{2}{5}\right)^{-4} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{-6-(-4)} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{-2} = \frac{25}{4}$

PER COMPRENDERE MEGLIO

La definizione di potenza con esponente negativo che abbiamo enunciato non è arbitraria; essa è l'unica definizione possibile se si vuole che le note proprietà delle potenze continuino a essere valide anche per gli esponenti negativi. Inoltre questa definizione può essere formulata solo dopo aver introdotto i numeri razionali.
Per comprenderlo consideriamo nuovamente l'esempio **4**. La divisione $10^5 : 10^7$ nell'insieme dei numeri razionali può essere eseguita applicando la definizione:

$$10^5 : 10^7 = \frac{10^5}{10^7} = \frac{1}{10^2}$$

Se cerchiamo di eseguirla applicando le proprietà delle potenze otteniamo $10^5 : 10^7 = 10^{-2}$.
Perciò, se vogliamo assegnare un significato all'espressione 10^{-2}, è necessario che essa rappresenti il risultato della divisione $10^5 : 10^7$, ossia $\frac{1}{10^2}$.
Queste considerazioni si possono generalizzare per qualsiasi espressione del tipo a^{-n}, dove n è un numero naturale; considerando la divisione $a^0 : a^n$ si ha

$$a^0 : a^n = 1 : a^n = \frac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0)$$

D'altra parte, applicando le proprietà formali delle potenze alla divisione $a^0 : a^n$, otteniamo

$$a^0 : a^n = a^{0-n} = a^{-n}$$

Quindi, se vogliamo assegnare all'espressione a^{-n} un significato che consenta di conservare la validità delle proprietà delle potenze, dev'essere

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Espressioni

27 Espressioni con i numeri razionali

Le regole per calcolare il valore di espressioni contenenti numeri razionali non sono diverse da quelle già viste a proposito dei numeri naturali e dei numeri interi relativi. Come sempre, si devono rispettare le priorità delle operazioni e tenere conto delle parentesi.

Oltre a ciò potremo incontrare frazioni i cui termini sono, a loro volta, delle espressioni, eventualmente contenenti altre frazioni. In questo caso si deve tener presente che tali frazioni non rappresentano altro che delle divisioni, come già detto nel **PARAGRAFO 23**.

ESEMPI

1 Calcoliamo il valore dell'espressione $\frac{5}{4}+3\cdot\left(2+\frac{1}{2}\right)^2$.

Occorre eseguire i calcoli rispettando le priorità delle operazioni e tenendo conto delle parentesi. Dobbiamo prima calcolare la somma indicata nella coppia di parentesi, poi la potenza, quindi eseguire la moltiplicazione e infine l'addizione:

$$\frac{5}{4}+3\cdot\left(2+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}+3\cdot\left(\frac{4+1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}+3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{4}+3\cdot\frac{25}{4}=\frac{5}{4}+\frac{75}{4}=\frac{5+75}{4}=\frac{80}{4}=20$$

2 Calcoliamo $9:\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

Osserviamo che possiamo cambiare l'esponente negativo in positivo, scrivendo al posto della base il suo reciproco:

$$9:\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=9:\left(\frac{3}{2}\right)^3$$

Possiamo poi trasformare la divisione in moltiplicazione, scrivendo al posto del divisore il suo reciproco:

$$9:\left(\frac{3}{2}\right)^3=9\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

L'effetto di queste due trasformazioni è quello di cambiare il segno dell'esponente del divisore e di trasformare la divisione in moltiplicazione, lasciando invariata la base del divisore.

> **RICORDA!**
>
> Si può trasformare una divisione in moltiplicazione, cambiando il segno dell'esponente del divisore.
>
> *Ciò risulta particolarmente utile quando il divisore ha un esponente negativo*:
>
> $$\boxed{a:b^{-n}=a\cdot b^n}$$

Pertanto **si può trasformare una divisione in moltiplicazione, cambiando il segno dell'esponente del divisore**. Ciò equivale a eseguire contemporaneamente i due passaggi sopra descritti:

$$9:\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=9\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=9\cdot\frac{2^3}{3^3}=9\cdot\frac{8}{27}=\frac{8}{3}$$

3 Calcoliamo il valore dell'espressione $E=\frac{16}{25}-\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{10}+\frac{1}{15}\right)^3:\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}$.

$$E=\frac{16}{25}-\left(\frac{5\cdot5-3\cdot3+1\cdot2}{30}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^3=\frac{16}{25}-\left(\frac{\cancel{18}^{3}}{\cancel{30}_{5}}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^3=\frac{16}{25}-\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}\right)^3=$$

$$=\frac{16}{25}-1^3=\frac{16}{25}-1=\frac{16-25}{25}=-\frac{9}{25}$$

4 Calcoliamo il valore dell'espressione

$$\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot2}$$

Osserviamo che l'espressione data equivale a $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot2\right)$.

Dobbiamo pertanto semplificare sia l'espressione al numeratore sia l'espressione al denominatore prima di eseguire la divisione:

$$\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot2}=\frac{\frac{-3+2}{6}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{1}{6}}{\frac{2+3}{6}}=\frac{-\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}}=\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{6}{5}\right)=-\frac{1}{5}$$

Frazioni e numeri decimali

28 Numeri decimali

A tutti sono noti i numeri decimali, ossia quei numeri rappresentati mediante due successioni di cifre, separate da una virgola. La successione di cifre a sinistra della virgola si chiama **parte intera** del numero, quella a destra della virgola si chiama **parte frazionaria**:

$$\underbrace{123}_{\text{parte intera}},\underbrace{4567}_{\text{parte frazionaria}}$$

Per comprendere pienamente tale tipo di rappresentazione, detta *rappresentazione decimale*, è necessario introdurre il concetto di frazione decimale.

29 Frazioni decimali

DEFINIZIONE **FRAZIONE DECIMALE**

Si dice frazione decimale ogni frazione che ha per denominatore una potenza di 10 con esponente positivo.

Sono frazioni decimali, ad esempio, $\frac{2}{10}$, $\frac{31.207}{100}$, $\frac{1.234.567}{10.000}$; non sono frazioni decimali invece $\frac{2}{3}$, $\frac{33}{5}$, $\frac{111}{200}$.

- Le frazioni decimali $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}$, ... sono dette rispettivamente **unità decimali** del primo, secondo, terzo, ... ordine.
- Una frazione decimale può essere sempre rappresentata come somma di un numero intero e di potenze con esponente positivo di $\frac{1}{10}$ (ossia di opportune unità decimali), ciascuna moltiplicata per una cifra da 0 a 9.

  Ad esempio, si ha

$$\frac{31.207}{1000}=\frac{31.000+200+7}{1000}=\frac{31.000}{1000}+\frac{200}{1000}+\frac{7}{1000}=31+\frac{2}{10}+\frac{7}{1000}$$

  e quindi

$$\frac{31.207}{1000}=31+2\cdot\frac{1}{10}+0\cdot\frac{1}{100}+7\cdot\frac{1}{1000}$$

I numeri decimali sono un modo per rappresentare le frazioni decimali. In FIGURA 9 vediamo che la frazione decimale $\frac{31.207}{1000}$ è uguale a 31,207 cioè a 31 unità, 2 decimi, 0 centesimi e 7 millesimi; risulta quindi $31{,}207=31+0{,}2+0{,}007$.

$$\frac{31.207}{1000}=31+2\cdot\frac{1}{10}+0\cdot\frac{1}{100}+7\cdot\frac{1}{1000}$$

$$31{,}207$$

FIGURA 9

Dunque le cifre che precedono la virgola rappresentano un numero intero, quelle che la seguono rappresentano unità decimali di ordine corrispondente al posto da esse occupato dopo la virgola.

30 Dalla frazione al numero decimale

Per trasformare una frazione in numero decimale è sufficiente dividere il numeratore per il denominatore. Il numero decimale che si ottiene si dice *generato* dalla frazione e questa si dice **frazione generatrice** del numero decimale.

ESEMPIO

1 Trasformiamo in numeri decimali le frazioni $\frac{11}{4}$, $\frac{19}{11}$ e $\frac{37}{6}$.

$$\begin{array}{r|l} 11 & \underline{\;4\;\;\;\;} \\ 30 & 2{,}75 \\ 20 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 19 & \underline{\;11\;\;\;\;\;\;\;\;} \\ 80 & 1{,}7272\ldots \\ 30 & \\ 80 & \\ 30 & \\ 8 & \\ \ldots & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 37 & \underline{\;6\;\;\;\;\;\;\;\;\;} \\ 10 & 6{,}1666\ldots \\ 40 & \\ 40 & \\ 40 & \\ 4 & \\ \ldots & \end{array}$$

Mentre nel caso di $\frac{11}{4}$ la divisione termina dopo un numero finito di passaggi, nel caso di $\frac{19}{11}$ e di $\frac{37}{6}$ la divisione non termina. Rappresentiamo perciò con i puntini di sospensione le cifre mancanti:

$$\frac{11}{4} = 2{,}75 \qquad \frac{19}{11} = 1{,}7272\ldots \qquad \frac{37}{6} = 6{,}1666\ldots$$

Come vedi dal precedente esempio, si possono presentare due casi.

- La divisione, dopo un numero finito di passaggi, termina dando per resto 0. In questo caso la frazione è rappresentata da un **numero decimale finito**. Osserviamo che anche i numeri naturali e quelli interi relativi possono essere considerati numeri decimali finiti.
- La divisione non termina, in quanto non si ottiene mai il resto 0. In questo caso il numero decimale ha infinite cifre dopo la virgola e, come hai potuto osservare, vi sono delle cifre che si ripetono periodicamente. In questo caso la frazione è rappresentata da un **numero decimale periodico**, cioè da un numero la cui rappresentazione decimale è illimitata, cioè infinita.

DEFINIZIONE NUMERO PERIODICO

Si dice che un numero decimale è periodico se le sue cifre decimali dopo la virgola si ripetono a gruppi a partire da una certa posizione.

- Il gruppo di cifre che si ripetono si chiama *periodo*.
- Se il periodo inizia subito dopo la virgola, la rappresentazione si dice *periodica semplice*; se invece inizia in una posizione successiva, la rappresentazione si dice *periodica mista* e le cifre che seguono la virgola e precedono il periodo si chiamano *antiperiodo*.

Non essendo possibile scrivere tutte le cifre decimali di un numero periodico, si usa scrivere le cifre del periodo una sola volta, sopralineate oppure inserite entro una coppia di parentesi tonde.
Osserviamo infine che è possibile riconoscere se una frazione dà luogo a un numero decimale finito oppure a un numero decimale periodico, anche senza eseguire la divisione tra il numeratore e il denominatore. In proposito si utilizzano i seguenti criteri.

- Una frazione, ridotta ai minimi termini, dà luogo a un **numero decimale finito** se il suo denominatore contiene come fattori primi solo o 2 o 5 oppure entrambi i fattori 2 e 5.
- Una frazione, ridotta ai minimi termini, dà luogo a un **numero decimale periodico semplice** se il suo denominatore non contiene come fattori primi né 2 né 5.
- Una frazione, ridotta ai minimi termini, dà luogo a un **numero decimale periodico misto** se il denominatore contiene i fattori primi 2 o 5 e altri numeri.

ESEMPI

2 Il numero razionale $\frac{11}{4}$ è rappresentato da un numero decimale finito: $\frac{11}{4} = 2{,}75$.

3 Il numero razionale $\frac{19}{11}$ è rappresentato da un numero decimale periodico: $\frac{19}{11} = 1{,}7272...$ Il periodo è rappresentato dal gruppo di cifre 72, e inizia subito dopo la virgola. Si tratta perciò di un numero decimale periodico semplice, e si può scrivere

$$\frac{19}{11} = 1{,}\overline{72} \quad \text{oppure} \quad \frac{19}{11} = 1{,}(72)$$

4 Il numero razionale $\frac{37}{6}$ è rappresentato da un numero decimale periodico: $\frac{37}{6} = 6{,}1666...$ Il periodo è rappresentato dall'unica cifra 6 ed è preceduto dalla cifra 1, che costituisce l'antiperiodo. Si tratta perciò di un numero decimale periodico misto, e si può scrivere

$$\frac{37}{6} = 6{,}1\overline{6} \quad \text{oppure} \quad \frac{37}{6} = 6{,}1(6)$$

5 Nel numero decimale periodico misto $2{,}3\overline{52}$ abbiamo:

$$\text{parte intera} \longrightarrow \underbrace{2{,}3}_{\text{antiperiodo}: \ 3}\overline{52} \longleftarrow \text{periodo}$$

IMPORTANTE

Noi abbiamo parlato di «numeri periodici». Questa espressione, però, non è del tutto corretta: la periodicità, infatti, non è una caratteristica del numero, ma della sua rappresentazione.
Siamo abituati a rappresentare i numeri, interi e non interi, nel sistema decimale, cioè a base 10. Ma questo tipo di rappresentazione è convenzionale. Vedremo infatti, nell'**UNITÀ 5**, che è possibile rappresentare i numeri anche in sistemi di numerazione con base diversa da 10.
Il numero razionale $\frac{1}{3}$, ad esempio, nel sistema decimale è periodico e quindi ha una rappresentazione decimale illimitata: $\frac{1}{3} = 0{,}333...$; invece nel sistema in base 3 la sua rappresentazione è 0,1, ossia è limitata ed è costituita da una sola cifra dopo la virgola. Pertanto non è il numero a essere periodico, ma la sua rappresentazione in un dato sistema di numerazione; quindi non si dovrebbe parlare di «numero periodico», ma di «rappresentazione periodica di un numero».
Tuttavia, fatta questa precisazione, continueremo a parlare di numeri periodici per non distaccarci troppo dal comune modo di esprimersi.

31 Dal numero decimale finito alla frazione

Consideriamo nuovamente l'esempio del **PARAGRAFO 29**, dove abbiamo esaminato un numero decimale e la sua rappresentazione come somma di frazioni decimali:

$$31{,}207 = 31 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{1}{100} + 7 \cdot \frac{1}{1000}$$

Osserviamo che si ha

$$31 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{1}{100} + 7 \cdot \frac{1}{1000} = \frac{31}{1} + \frac{2}{10} + \frac{7}{1000} = \frac{31 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 7}{1000} = \frac{31.207}{1000}$$

cioè

$$31{,}207 = \frac{31.207}{1000}$$

Possiamo perciò comprendere la nota regola che permette di determinare la frazione generatrice di un numero decimale finito.

Regola Per determinare la **frazione generatrice di un numero decimale finito**, al numeratore si scrivono le cifre del numero, senza la virgola, e al denominatore si scrive 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre che seguono la virgola.

ESEMPIO

Trasformiamo in frazioni i numeri decimali finiti 0,005 e 10,3125.

- Per trasformare 0,005 in frazione, scriviamo 5 al numeratore (trascurando gli zeri che precedono il 5) e 1000 (cioè 1 seguito da tre zeri) al denominatore:

$$0{,}005 = \frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$$

- Per trasformare 10,3125 in frazione, scriviamo 103.125 al numeratore e 10.000 (1 seguito da quattro zeri) al denominatore:

$$10{,}3125 = \frac{103.125}{10.000} = \frac{165}{16}$$

32 Dal numero decimale periodico alla frazione

Regola Per determinare la **frazione generatrice di un numero decimale periodico** si procede così.

- Si esegue la sottrazione tra il numero intero formato dalle cifre del numero dato, scritto senza virgola, e il numero intero formato dalle cifre che precedono il periodo; si scrive la differenza ottenuta al *numeratore* della frazione generatrice.
- Si scrive al *denominatore* il numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo.

Osserviamo che, nel caso di un numero periodico semplice, la regola sopra enunciata vale ugualmente; basta infatti considerare l'antiperiodo di tale numero costituito da zero cifre; pertanto si scriverà al denominatore il numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo, senza farli seguire da zeri.

ESEMPI

1 Determiniamo la frazione generatrice di $3{,}4\overline{12}$.

- Il numero intero formato dalle cifre che precedono il periodo del numero seguite da quelle che formano il periodo, ignorando la virgola, è 3412. Il numero intero formato solo dalle cifre che precedono il periodo è 34. Eseguiamo la sottrazione: $3412 - 34 = 3378$. Scriviamo tale numero al numeratore della frazione generatrice che vogliamo determinare.
- Al denominatore scriviamo il numero formato da due 9 (perché le cifre del periodo sono due) seguiti da uno zero (perché l'antiperiodo è costituito da una sola cifra), ossia 990.

In pratica si scrive direttamente la frazione in questo modo:

$$3{,}4\overline{12} = \frac{3412 - 34}{990} = \frac{3378}{990} = \frac{563}{165}$$

2 Determiniamo direttamente la frazione generatrice di $2{,}18\overline{4}$:

$$2{,}18\overline{4} = \frac{2184 - 218}{900} = \frac{1966}{900} = \frac{983}{450}$$

3 Determiniamo la frazione generatrice di $0{,}\overline{15}$.

In questo caso non c'è antiperiodo: $0{,}\overline{15} = \dfrac{15}{99} = \dfrac{5}{33}$.

IL PERIODO 9

Proviamo ad applicare la regola prima vista per determinare la frazione generatrice del numero decimale periodico $0{,}\overline{9}$:

$$0{,}\overline{9} = \frac{9-0}{9} = 1 \quad \longrightarrow \quad 1 = 0{,}9999...$$

Giungiamo così a un apparente paradosso: il numero intero 1 è uguale a un numero decimale periodico, cioè a un numero decimale con infinite cifre dopo la virgola!

U3. NUMERI RAZIONALI

La giustificazione di tale uguaglianza, nonché quella della stessa regola per determinare la frazione generatrice di un numero periodico qualsiasi, richiederebbe conoscenze matematiche che per ora non possiedi. Possiamo comunque cercare di giustificare in modo intuitivo l'uguaglianza $1 = 0{,}9999...$, ad esempio considerando la relazione

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333...$$

e moltiplicando per 3 entrambi i membri:

$$3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot 0{,}3333... \quad \longrightarrow \quad 1 = 0{,}9999...$$

Otteniamo così l'uguaglianza prima trovata.

Applicando la regola per determinare la frazione generatrice ad altri numeri decimali con periodo 9, abbiamo ad esempio

$$3{,}\overline{9} = \frac{39-3}{9} = \frac{36}{9} = 4 \qquad 0{,}36\overline{9} = \frac{369-36}{900} = \frac{333}{900} = \frac{37}{100} = 0{,}37$$

Dall'esame di questi esempi possiamo dedurre la seguente regola.

Regola Un numero periodico con periodo 9 è uguale al numero decimale finito che si ottiene da quello dato eliminando il periodo 9 e aumentando di una unità l'ultima cifra che precede il periodo.

Ritroviamo così $\quad 3{,}\overline{9} = 3 + 1 = 4 \qquad 0{,}36\overline{9} = 0{,}36 + 0{,}01 = 0{,}37$

33 Notazione esponenziale

Abbiamo già accennato alla scrittura di un numero in **notazione** (o **forma**) **esponenziale** (UNITÀ 1, PARAGRAFO 14). Vogliamo qui riprendere e approfondire questo argomento, dopo aver introdotto i numeri razionali e, in particolare, le potenze con esponente negativo.

Le potenze di 10, con esponente positivo o negativo, permettono di esprimere sinteticamente numeri molto grandi o molto piccoli.

Come già sappiamo è

$$10^0 = 1 \qquad 10^1 = 10 \qquad 10^2 = 100 \qquad 10^3 = 1000 \qquad 10^4 = 10.000 \qquad 10^5 = 100.000 \qquad ...$$

e quindi il numero 10^n, con $n \geq 0$, è rappresentato da 1 seguito da n zeri.

Inoltre si ha

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \qquad 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01 \qquad 10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

e, analogamente, $10^{-4} = 0{,}0001$; $10^{-5} = 0{,}00001$; ...

In generale il numero 10^{-n}, con $n \geq 0$, è rappresentato da n zeri seguiti da un 1, con la virgola decimale subito dopo il primo zero.

Riassumendo, si ha

$$\boxed{10^n = 1\underbrace{00...0}_{n \text{ zeri}} \qquad\qquad 10^{-n} = \underbrace{0{,}0...0}_{n \text{ zeri}}1}$$

Consideriamo ora, ad esempio, il numero 30.000.000.000 che esprime, approssimativamente, la *velocità della luce* in centimetri al secondo. Esso si può anche esprimere così:

$$30.000.000.000 = 3 \cdot 10.000.000.000 = 3 \cdot 10^{10}$$

Quindi l'espressione $3 \cdot 10^{10}$ equivale a 30.000.000.000, ma è evidentemente più semplice.

Un'altra importante costante fisica è la *massa dell'elettrone* che, espressa in kilogrammi, è

$$0{,}000000000000000000000000000000910938$$

Essa si può esprimere così:

$$9{,}10938 \cdot 0{,}0000000000000000000000000000001 = 9{,}10938 \cdot 10^{-31}$$

Anche in questo caso l'uso delle potenze di 10 ci permette di esprimere sinteticamente un numero la cui scrittura richiederebbe molte cifre.
Se un numero è scritto utilizzando in tale modo le potenze di 10, si dice che esso è scritto in **forma esponenziale** (**notazione esponenziale**).

DEFINIZIONE **NOTAZIONE ESPONENZIALE**

Si dice che un numero è scritto in notazione o forma esponenziale se è espresso come prodotto di un numero decimale finito, detto *parte significativa*, per una potenza di 10.

DEFINIZIONE **NOTAZIONE SCIENTIFICA**

Se in un numero scritto in notazione esponenziale il valore assoluto della parte significativa è minore di 10 e maggiore o uguale a 1, si dice che il numero è scritto in notazione scientifica.

Osserviamo che la notazione scientifica è un tipo particolare di notazione esponenziale.
Se si vuole scrivere un numero razionale a in notazione scientifica, occorre determinarne la parte significativa e l'esponente di 10.
La regola che segue permette di determinare la parte significativa e l'esponente di 10 di un numero positivo a decimale finito che si vuole scrivere in notazione scientifica.
Se il numero è negativo è sufficiente applicare la regola considerando il suo valore assoluto e facendolo poi precedere dal segno $-$.

Regola

Per **scrivere in notazione scientifica un numero positivo a decimale finito**, si procede così.

$\boldsymbol{a > 1}$

- Per ottenere la parte significativa si considera il numero formato dalle stesse cifre di a e si pone la virgola dopo la prima cifra.
- L'esponente di 10 è il numero di cifre di a che precedono l'eventuale virgola (cioè il numero di cifre della parte intera di a), diminuito di una unità.

$\boldsymbol{0 < a < 1}$

- Per ottenere la parte significativa si considera il numero formato dalle stesse cifre di a, si eliminano gli zeri consecutivi che seguono la virgola e che precedono la prima cifra di a diversa da zero, e si pone la virgola dopo tale cifra.
- L'esponente di 10 è uguale al numero di zeri consecutivi che seguono la virgola, aumentato di una unità e preceduto dal segno $-$.

ESEMPI

1 Scriviamo in notazione scientifica il numero $a = 7.500.000.000.000$.

La parte significativa è 7,5. Il numero di cifre del numero dato è 13, quindi l'esponente di 10 dev'essere $13 - 1 = 12$.
Perciò a, espresso in notazione scientifica, è $7{,}5 \cdot 10^{12}$.

2 Scriviamo in notazione scientifica il numero $a = 143{,}027$.

La parte significativa è 1,43027. Il numero delle cifre della parte intera di a è 3, quindi l'esponente di 10 sarà $3 - 1 = 2$.
Pertanto la scrittura di a in notazione scientifica è $1{,}43027 \cdot 10^{2}$.

3 Scriviamo in notazione scientifica il numero $a = 0{,}143027$.

La parte significativa è 1,43027.
Il numero degli zeri consecutivi dopo la virgola è 0, quindi l'esponente di 10 è -1.
Pertanto è $a = 1{,}43027 \cdot 10^{-1}$.

4 Scriviamo in notazione scientifica il numero $-0{,}00000314159$.
Applichiamo la regola a $|a|$. La parte significativa è 3,14159. Gli zeri consecutivi dopo la virgola sono 5, e quindi l'esponente di 10 sarà $-(5+1) = -6$.
Quindi è $-0{,}00000314159 = -3{,}14159 \cdot 10^{-6}$.

Osserviamo che il numero 7.500.000.000.000, considerato nell'esempio **1**, si può scrivere in altre notazioni esponenziali che non sono però notazioni scientifiche; ad esempio

$$7.500.000.000.000 = 75 \cdot 100.000.000.000 = 75 \cdot 10^{11}$$

E ancora, come puoi facilmente verificare, lo stesso numero si può scrivere come $0{,}75 \cdot 10^{13}$ o $750 \cdot 10^{10}$. Tutte queste espressioni rappresentano lo stesso numero. Tuttavia solo $7{,}5 \cdot 10^{12}$ è la sua espressione in notazione scientifica. In tutti gli altri casi si può parlare di forma esponenziale, ma non di notazione scientifica, perché la parte significativa è, in valore assoluto, maggiore di 10 o minore di 1.

- Possiamo quindi concludere che **un numero può essere espresso in diversi modi in forma esponenziale, ma in un solo modo in notazione scientifica**.
- Per trasformare un numero da una forma esponenziale a un'altra equivalente si può procedere in uno dei seguenti modi:
  - si può spostare la virgola a destra di n posti, sottraendo contemporaneamente n unità dall'esponente di 10;
  - si può spostare la virgola a sinistra di n posti, sommando contemporaneamente n unità all'esponente di 10.

ESEMPIO

5 Consideriamo nuovamente il numero $-0{,}00000314159$. Abbiamo visto che in notazione scientifica esso si scrive $-3{,}14159 \cdot 10^{-6}$. Applicando la regola precedente possiamo scriverlo in modi diversi in forma esponenziale, ad esempio

$$-3{,}14159 \cdot 10^{-6} = -314{,}159 \cdot 10^{-6-2} = -314{,}159 \cdot 10^{-8}$$
$$-3{,}14159 \cdot 10^{-6} = -0{,}314159 \cdot 10^{-6+1} = -0{,}314159 \cdot 10^{-5}$$

34 Ordine di grandezza

Abbiamo già visto (UNITÀ 1, PARAGRAFO 14) che per **ordine di grandezza** di un numero s'intende la potenza di 10 più vicina a quel numero.
Nella pratica, invece di applicare la definizione ora richiamata, si è soliti usare un criterio che permette di determinare rapidamente l'ordine di grandezza di un dato numero.

Regola

Per **determinare l'ordine di grandezza di un numero** si procede così.

- Per prima cosa si scrive il numero in notazione scientifica.
  Esso si presenterà quindi nella forma
  $$a,\ldots \cdot 10^n$$
  dove a è un numero naturale maggiore o uguale a 1 e minore di 10 $(1 \leq a < 10)$, ed n è un numero intero relativo.
- Se è $a < 5$, l'ordine di grandezza è 10^n; se invece è $a \geq 5$, l'ordine di grandezza è 10^{n+1}.

ESEMPI

1 Determiniamo l'ordine di grandezza del numero 33.875.

Scrivendolo in notazione scientifica, si ha $33.875 = 3{,}3875 \cdot 10^4$.
Poiché 3 (< 5) è più vicino a 1 che a 10, l'ordine di grandezza di 33.875 è 10^4.

2 Il diametro di una lente è di 49 mm. Calcoliamo l'ordine di grandezza, in metri, di tale misura.

Si ha $49 \text{ mm} = 0{,}049 \text{ m} \qquad 0{,}049 = 4{,}9 \cdot 10^{-2}$

Essendo $a = 4 < 5$, l'ordine di grandezza richiesto è 10^{-2}. Quindi il diametro di quella lente è dell'ordine del centesimo di metro, cioè del centimetro.

3 Determiniamo l'ordine di grandezza del numero 753,04.

Si ha $753{,}04 = 7{,}5304 \cdot 10^2$; essendo $a = 7 > 5$ ed essendo quindi 7 più vicino a 10 che a 1, l'ordine di grandezza di 753,04 è $10^{2+1} = 10^3$.

4 Analogamente, si avrà che per 997 l'ordine di grandezza è 10^3.
Infatti $997 = 9{,}97 \cdot 10^2$ e $9 > 5 \longrightarrow 10^{n+1} = 10^{2+1} = 10^3$.

5 Per $83 \cdot 10^{-7}$ l'ordine di grandezza è 10^{-5}.
Infatti $83 \cdot 10^{-7} = 8{,}3 \cdot 10^{-6}$ e $8 > 5 \longrightarrow 10^{n+1} = 10^{-6+1} = 10^{-5}$.

UTILIZZO DELLE POTENZE DI 10

L'uso delle potenze di 10 si rivela molto utile, oltre che in matematica, anche in astronomia, in fisica, in biologia, in chimica e nelle scienze in genere, ad esempio quando si parla di distanze infinitamente grandi o di grandezze infinitamente piccole.
Ci sembra utile ricordare qui i prefissi che indicano, sfruttando appunto le potenze di 10, multipli e sottomultipli delle varie unità di misura.

Ad esempio si ha:

$$1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} = 1000 \text{ m}$$

$$1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g} = 1000 \text{ g}$$

$$1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} = \frac{1}{1000} \text{ m}$$

$$1 \text{ mg} = 10^{-3} \text{ g} = \frac{1}{1000} \text{ g}$$

prefisso	valore riferito all'unità di misura principale (ordine di grandezza)	simbolo
yotta	10^{24}	Y
zetta	10^{21}	Z
exa	10^{18}	E
peta	10^{15}	P
tera	10^{12}	T
giga	10^{9}	G
mega	10^{6}	M
kilo	10^{3}	k
etto	10^{2}	h
deca	10^{1}	da
deci	10^{-1}	d
centi	10^{-2}	c
milli	10^{-3}	m
micro	10^{-6}	μ
nano	10^{-9}	n
pico	10^{-12}	p
femto	10^{-15}	f
atto	10^{-18}	a
zepto	10^{-21}	z
yocto	10^{-24}	y

Proporzioni

35 Rapporti e proporzioni

DEFINIZIONE **RAPPORTO TRA DUE NUMERI**

Si dice rapporto tra due numeri, il secondo dei quali diverso da zero, il quoto della divisione del primo per il secondo.

ESEMPI

1. Il rapporto tra 8 e 2 è $8 : 2 = 4$; il rapporto tra 2 e 8 è $2 : 8 = \frac{1}{4}$.
2. Il rapporto tra $\frac{2}{3}$ e $-\frac{6}{5}$ è $\frac{2}{3} : \left(-\frac{6}{5}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{5}{9}$.

DEFINIZIONE **PROPORZIONE**

Si dice proporzione l'uguaglianza di due rapporti.

Una proporzione si esprime solitamente nella forma

$$\boxed{a : b = c : d \quad \text{con } b \neq 0,\ d \neq 0} \qquad (1)$$

che si legge «a sta a b come c sta a d».

Ricordando che una linea di frazione rappresenta una divisione, è anche possibile scrivere la (1) nella forma

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \text{con } b \neq 0,\ d \neq 0$$

Ad esempio risulta

$$10 : 16 = 15 : 24$$

e infatti è

$$\frac{10}{16} = \frac{15}{24}$$

perché le due frazioni sono equivalenti a $\frac{5}{8}$.

- I quattro numeri che formano una proporzione si dicono **termini della proporzione**.
  Il primo e il quarto termine si dicono **estremi**, il secondo e il terzo si dicono **medi**, il primo e il terzo si dicono **antecedenti**, il secondo e il quarto si dicono **conseguenti**.

estremi
medi
$$10 : 16 = 15 : 24$$
antecedenti
conseguenti

- Una proporzione in cui i medi sono uguali si dice **proporzione continua**. Ad esempio è continua la proporzione

$$16 : 8 = 8 : 4 \qquad (2)$$

- Diremo **terzo proporzionale** il quarto termine di una proporzione continua. Ad esempio, nella proporzione (2) il terzo proporzionale dopo 16 e 8 è 4.
- Diremo **medio proporzionale** tra due termini dati il termine medio di una proporzione continua i cui estremi sono i termini dati. Ad esempio, ancora nella proporzione (2) il medio proporzionale è 8.

- Diremo **quarto proporzionale** dopo tre numeri, dati in un certo ordine, il quarto termine di una proporzione non continua i cui primi termini sono i numeri dati. Ad esempio, nella proporzione

$$10 : 16 = 15 : 24$$

il numero 24 è il quarto proporzionale dopo 10, 16 e 15.

36 Proprietà fondamentale delle proporzioni

Verifichiamo ora la seguente importante proprietà.

- **Proprietà fondamentale**
  In una proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

Consideriamo la proporzione $a : b = c : d$, con $b \neq 0$ e $d \neq 0$.
Applicando la proprietà invariantiva, si ha

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \qquad \text{e} \qquad \frac{c}{d} = \frac{c \cdot b}{d \cdot b}$$

Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, essendo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, è

$$\frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{c \cdot b}{d \cdot b}$$

L'ultima è una uguaglianza tra due frazioni che hanno uguale denominatore. Devono quindi essere uguali anche i numeratori, cioè $a \cdot d = c \cdot b$. Ciò significa che il prodotto degli estremi a e d è uguale al prodotto dei medi b e c:

$$\boxed{a : b = c : d \quad \longrightarrow \quad b \cdot c = a \cdot d \qquad b \neq 0,\ d \neq 0}$$

In particolare, se la proporzione è continua, il prodotto degli estremi è uguale al quadrato del termine medio:

$$\boxed{a : b = b : c \quad \longrightarrow \quad b^2 = a \cdot c \qquad b \neq 0,\ c \neq 0}$$

Entrambe le relazioni precedenti si possono invertire:

$$\begin{array}{lll} b \cdot c = a \cdot d \quad \longrightarrow \quad a : b = c : d & & (b,\ d \neq 0) \\ b^2 = a \cdot c \quad \longrightarrow \quad a : b = b : c & & (b,\ c \neq 0) \end{array}$$

Dalla proprietà fondamentale si ricavano inoltre le seguenti regole, che permettono di determinare un termine incognito di una proporzione.

- Un medio incognito è uguale al prodotto degli estremi diviso il medio noto.
- Un estremo incognito è uguale al prodotto dei medi diviso l'estremo noto.
- Il quadrato del medio incognito di una proporzione continua è uguale al prodotto degli estremi.

ESEMPI

1 Consideriamo l'uguaglianza $2 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{3}$.

Grazie alla proprietà fondamentale possiamo scrivere una proporzione che, ad esempio, ha per termini medi i fattori 2 e $\frac{1}{2}$ e per estremi i fattori 3 e $\frac{1}{3}$:

$$3 : 2 = \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$$

2 Determiniamo il termine incognito x della seguente proporzione:

$$5 : (-2) = x : 15$$

Applichiamo la prima regola; avremo

$$x = \frac{5 \cdot 15}{(-2)} \quad \longrightarrow \quad x = -\frac{75}{2}$$

3 Determiniamo il medio proporzionale tra 24 e 54.

Detto il x il numero richiesto, dev'essere

$$24 : x = x : 54 \longrightarrow x^2 = 24 \cdot 54 \longrightarrow x^2 = 1296$$

Poiché si ha $36^2 = (-36)^2 = 1296$, il medio proporzionale tra 24 e 54 può essere sia 36 sia -36.

4 Determiniamo il quarto proporzionale dopo i numeri $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{3}$, -7.

Detto x il numero richiesto, dev'essere

$$\frac{1}{2} : \frac{5}{3} = (-7) : x \longrightarrow x = \frac{\frac{5}{3} \cdot (-7)}{\frac{1}{2}} \longrightarrow x = \left(-\frac{35}{3}\right) \cdot 2 \longrightarrow x = -\frac{70}{3}$$

37 Altre proprietà delle proporzioni

Proprietà del permutare

Se in una proporzione si scambiano tra loro i termini medi o i termini estremi, si ottiene una nuova proporzione.

$$a : b = c : d \longrightarrow d : b = c : a \qquad\qquad a : b = c : d \longrightarrow a : c = b : d$$

Proprietà dell'invertire

Se in una proporzione si scambia ogni antecedente con il rispettivo conseguente, si ottiene una nuova proporzione.

$$a : b = c : d \longrightarrow b : a = d : c$$

Proprietà del comporre

In una proporzione la somma dei primi due termini sta al primo (o al secondo) come la somma degli altri due termini sta al terzo (o al quarto).

$$a : b = c : d \longrightarrow (a + b) : b = (c + d) : d$$

Proprietà dello scomporre

In una proporzione la differenza dei primi due termini sta al primo (o al secondo) come la differenza degli altri due termini sta al terzo (o al quarto).

$$a : b = c : d \longrightarrow (a - b) : b = (c - d) : d$$

Come al solito, in ciascuna delle proporzioni prima scritte, i conseguenti devono essere diversi da 0.

ESEMPI

1 Determiniamo il termine incognito x nella seguente proporzione:

$$(3 - x) : x = 6 : 5$$

Applicando la proprietà del comporre, si ha

$$(3 - \cancel{x} + \cancel{x}) : x = (6 + 5) : 5 \longrightarrow 3 : x = 11 : 5$$

Dall'ultima proporzione otteniamo

$$x = \frac{3 \cdot 5}{11} = \frac{15}{11}$$

2 Determiniamo il termine incognito x nella seguente proporzione, sapendo che dev'essere $x > 0$:

$$(2 + x) : x = (18 + x) : 18$$

Applicando la proprietà dello scomporre si ha

$$(2 + \cancel{x} - \cancel{x}) : x = (\cancel{18} + x - \cancel{18}) : 18 \longrightarrow 2 : x = x : 18$$

Dovendo essere $x > 0$, dall'ultima proporzione otteniamo

$$x^2 = 36 \longrightarrow x = 6$$

Percentuali

38 Per cento e per mille

Consideriamo le seguenti due situazioni.

A Su un articolo che costava 240 euro è stato praticato uno sconto del 5% (si legge: «cinque per cento»). Qual è l'ammontare, in euro, dello sconto? E qual è ora il costo dell'articolo?

B Per una operazione finanziaria su un importo di 3600 euro ho dovuto pagare alla mia banca una provvigione del 3‰ (si legge: «tre per mille»). Qual è stato il costo dell'operazione?

Nel caso **A**, dire che lo sconto è del 5% significa che per ogni cento euro è stata accordata una riduzione di 5 euro. Possiamo perciò calcolare l'ammontare x dello sconto risolvendo una proporzione:

$$x : 240 = 5 : 100 \longrightarrow x = \frac{240 \cdot 5}{100} \longrightarrow x = 12$$

Lo sconto praticato ammonta quindi a 12 euro e quindi l'articolo ora costa, in euro, 240 − 12 cioè 228 euro.

Nel caso **B** il costo x dell'operazione è di 3 euro per ogni 1000 euro. Anche in questo caso possiamo servirci di una proporzione:

$$x : 3600 = 3 : 1000 \longrightarrow x = \frac{3600 \cdot 3}{1000} \longrightarrow x = 10{,}8$$

Quindi il costo dell'operazione è stato di 10,80 euro.

- In generale, dire «x è il p% di A» significa che x sta ad A come p sta a 100:

$$x \text{ è il } p\% \text{ di } A \longrightarrow x : A = p : 100$$

ossia, risolvendo la proporzione,

$$\boxed{x = A \cdot \frac{p}{100}} \qquad \boxed{1}$$

- Analogamente, dire «x è il p‰ di A» significa che x sta ad A come p sta a 1000:

$$x \text{ è il } p‰ \text{ di } A \longrightarrow x : A = p : 1000$$

ossia, risolvendo la proporzione,

$$\boxed{x = A \cdot \frac{p}{1000}} \qquad \boxed{2}$$

- In definitiva, per calcolare il p% di un dato valore A si moltiplica A per $\frac{p}{100}$; per calcolare il p‰ di un dato valore, lo si moltiplica per $\frac{p}{1000}$. Per esprimere ciò si usa anche scrivere

$$\boxed{p\% = \frac{p}{100} \qquad p‰ = \frac{p}{1000}} \qquad \boxed{3}$$

ESEMPI

1 Nell'anno scolastico precedente si sono iscritti alla prima classe di un istituto 680 allievi. Quest'anno le iscrizioni sono aumentate del 7,5%. Quanti studenti si sono iscritti alla prima classe in quest'anno scolastico?

Applicando la **1** troviamo

$$680 \cdot \frac{7{,}5}{100} = 51$$

Il numero trovato rappresenta il numero di iscrizioni in più rispetto a quelle del precedente anno scolastico. Pertanto il numero di iscritti quest'anno è stato $680 + 51 = 731$.

2 450 ml di una soluzione contengono il 3,8‰ di alcol. Qual è la quantità di alcol contenuta nella soluzione?

È sufficiente applicare la **2**:

$$450 \cdot \frac{3{,}8}{1000} = 1{,}71$$

Quindi la soluzione contiene 1,71 ml di alcol.

39 Il calcolo della percentuale

Se un articolo, che costava 120 euro, viene venduto a 102 euro, qual è la percentuale di sconto praticata?

Questo problema assomiglia al primo dei due proposti nel paragrafo precedente, ma c'è un'importante differenza: in questo caso l'ammontare dello sconto, in euro, è noto, essendo $120 - 102 = 18$, mentre la percentuale di sconto è incognita. Per determinarla possiamo comunque scrivere un'analoga proporzione, dove l'incognita questa volta è lo sconto percentuale:

$$18 : 120 = p : 100 \quad \longrightarrow \quad p = \frac{18 \cdot 100}{120} \quad \longrightarrow \quad p = 15$$

Possiamo perciò affermare che lo sconto è del 15%.
Lo stesso risultato si può trovare direttamente applicando la formula

$$\boxed{p = \frac{x}{A} \cdot 100} \qquad \boxed{4}$$

con $x = 18$ e $A = 120$.

ESEMPIO

Da un'indagine statistica, condotta su un campione di 58.000 persone, è risultato che 203 di esse hanno un reddito annuo superiore a 100.000 euro. Quale percentuale del campione rappresentano?
Applicando la **4** si ha subito

$$p = \frac{203}{58.000} \cdot 100 = 0{,}35$$

PER CENTO O PER MILLE?

- Quando il valore percentuale è molto piccolo, è preferibile indicare il valore per mille.
- Il valore per mille si ottiene moltiplicando per 10 il valore percentuale.
- Il valore percentuale si ottiene dividendo per 10 il valore per mille.

Quando il valore percentuale è molto piccolo, come nell'esempio precedente, è più opportuno utilizzare il valore per mille, che si ottiene moltiplicando per 10 il valore percentuale. Dunque la percentuale del campione considerato nell'esempio è il 3,5‰.

40 Percentuale di una percentuale

A volte si leggono o si ascoltano frasi in cui si parla di una percentuale riferita non a un valore, ma a un'altra percentuale. Consideriamo due esempi.

A L'80% degli elettori ha partecipato alle votazioni. Il partito X ha ottenuto il 16% dei voti. Quale percentuale degli elettori ha votato per il partito X?

B Nella composizione di una confezione di ravioli si legge che il ripieno costituisce il 40% del peso totale e che il ripieno è costituito per il 60% di carne. Qual è la percentuale di carne rispetto al peso totale?

Per risolvere problemi di questo tipo è sufficiente moltiplicare tra loro le due percentuali p_1 e p_2, tenendo presenti le relazioni 3.

Nel caso **A** si ha $\qquad p_1\% = 80\% = \dfrac{80}{100} \qquad p_2\% = 16\% = \dfrac{16}{100}$

e quindi la percentuale di elettori che ha votato per il partito X è

$$\frac{80}{100} \cdot \frac{16}{100} = \frac{1280}{10.000} = \frac{12,8}{100} = 12,8\%$$

ossia a votare per il partito X è stato il 12,8% degli aventi diritto al voto.

Nel caso **B** si ha $\qquad p_1\% = 40\% = \dfrac{40}{100} \qquad p_2\% = 60\% = \dfrac{60}{100}$

e quindi la percentuale di carne rispetto al peso totale è

$$\frac{40}{100} \cdot \frac{60}{100} = \frac{2400}{10.000} = \frac{24}{100} = 24\%$$

ESEMPIO

Una soluzione alcolica contiene il 2,5‰ di alcol. Si prepara una miscela contenente il 20% di questa soluzione e l'80% di acqua distillata. Qual è la percentuale di alcol contenuta in tale miscela?
Nella miscela ottenuta l'alcol costituisce il 2,5‰ di una parte che è il 20% del totale. Pertanto la percentuale di alcol rispetto al totale della miscela è

$$2,5‰ \cdot 20\% = \frac{2,5}{1000} \cdot \frac{20}{100} = \frac{50}{100.000} = \frac{0,5}{1000} = 0,5‰$$

41 Interesse

Quando si presta una somma di denaro o la si deposita in banca, il creditore rinuncia, per un certo periodo di tempo, alla disponibilità di tale somma. Per tale motivo il debitore, o la banca, lo compensa con una somma di denaro, detta **interesse**, proporzionale alla somma prestata, detta **capitale**, e alla durata del prestito. Considerando un periodo di un anno, il rapporto tra l'interesse I e il capitale C si chiama **tasso d'interesse annuo** (o semplicemente *tasso d'interesse* quando non vi sia pericolo d'equivoco) e viene di solito espresso come percentuale e indicato con la lettera r:

$$\boxed{\text{in un anno} \longrightarrow r = \frac{I}{C}} \qquad (5)$$

Quindi l'interesse corrisposto per il prestito di un capitale C a un tasso r per il periodo di un anno si calcola con la formula:

$$\boxed{\text{in un anno} \longrightarrow I = C \cdot r} \qquad (6)$$

Se la durata del prestito è diversa da un anno, l'interesse dovuto, che viene anche chiamato *interesse maturato*, si calcola con la seguente formula, dove t rappresenta il tempo, espresso in anni:

$$\boxed{I = C \cdot r \cdot t} \qquad (7)$$

ESEMPI

1 Ho prestato 600 €. Dopo un anno mi vengono restituiti 642 €. Qual è il tasso d'interesse?

La somma restituita è costituita dal capitale prestato più l'interesse maturato. L'interesse ammonta quindi, in euro, a 642 – 600 cioè a 42 euro. Applicando la $\boxed{5}$ determiniamo il tasso d'interesse:

$$r = \frac{I}{C} = \frac{42}{600} = \frac{7}{100} = 7\%$$

2 Ho depositato in banca 1500 € a un tasso d'interesse del 3,5%. Quale interesse potrò riscuotere tra un anno?

Applicando la $\boxed{6}$ otteniamo $I = C \cdot r = 1500 \cdot 3{,}5\% = 1500 \cdot \dfrac{3{,}5}{100} = 52{,}5$.

Dopo un anno riscuoterò quindi l'interesse di 52,50 €.

3 Ho depositato in banca 2400 € per 8 mesi, a un tasso d'interesse del 2,8%. A quanto ammonta l'interesse maturato?

Il periodo di tempo, in questo caso, è diverso da un anno. Bisogna quindi applicare la $\boxed{7}$ in cui il valore di t è la durata del prestito espressa in anni. Considerato che in un anno vi sono 12 mesi, 8 mesi rappresentano $\dfrac{8}{12}$ di anno. Applichiamo perciò la $\boxed{7}$:

$$I = C \cdot r \cdot t = 2400 \cdot 2{,}8\% \cdot \frac{8}{12} = 2400 \cdot \frac{2{,}8}{100} \cdot \frac{2}{3} = 44{,}8$$

Dopo 8 mesi l'interesse maturato è 44,80 €.

INTERESSE SEMPLICE E INTERESSE COMPOSTO

La formula $I = C \cdot r \cdot t$ viene di solito usata per periodi di tempo non superiori a un anno.
Per periodi di tempo superiori essa continua a essere valida se, al termine di ogni anno, il debitore paga al creditore gli interessi maturati in quel periodo. In questo caso si parla di **regime di interesse semplice**.
Se ciò non avviene, ossia se al termine dell'anno il debitore trattiene gli interessi, per l'anno successivo gli interessi devono essere calcolati sul capitale aumentato degli interessi maturati e non ritirati. In questo caso si parla di **regime di interesse composto** e si utilizzano formule diverse e più complesse.