UNITÀ 2

Numeri interi relativi

- L'insieme dei numeri interi relativi
- Le operazioni aritmetiche con i numeri interi relativi
- Le potenze
- Espressioni

L'insieme dei numeri interi relativi

1 I numeri interi relativi

I numeri naturali non consentono di risolvere tutti i problemi. Ad esempio, nell'insieme dei numeri naturali non possiamo eseguire la sottrazione $8 - 12$. In generale in $\mathbb{N}$ non si può eseguire una sottrazione se il sottraendo è maggiore del minuendo. Eppure una simile sottrazione, in diverse situazioni, può avere significato. Ad esempio (FIGURA 1): la temperatura ieri era di 8 gradi, ma oggi si è abbassata di 12 gradi; qual è ora la temperatura?
Per risolvere problemi come questo è necessario introdurre i **numeri interi relativi**.

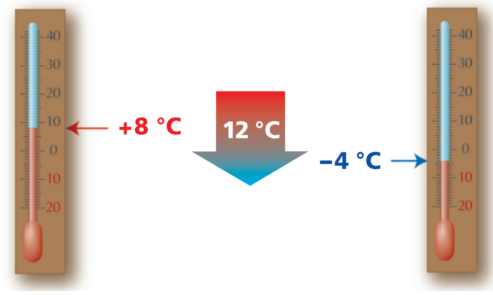

FIGURA 1

DEFINIZIONE NUMERO INTERO RELATIVO

Si dice numero intero relativo, o semplicemente *numero intero*, ogni numero naturale preceduto da un *segno* + o −.

- L'**insieme dei numeri interi relativi** viene indicato con la lettera $\mathbb{Z}$.
- I numeri interi preceduti dal segno + si dicono **positivi**, quelli preceduti dal segno − si dicono **negativi**.
- Due numeri interi che hanno lo stesso segno si dicono **concordi**; due numeri interi che hanno segni diversi si dicono **discordi**.

PREREQUISITI

È necessario conoscere gli argomenti dell'**UNITÀ 1**, ossia i numeri naturali, le operazioni con i numeri naturali e le loro proprietà, le potenze e le proprietà delle potenze nell'insieme dei numeri naturali.

OBIETTIVI

Conoscenze

- Proprietà dell'insieme dei numeri interi relativi
- Concetto di valore assoluto e significato di numeri opposti
- Definizioni e proprietà delle operazioni con i numeri interi relativi
- Potenze a base intera ed esponente naturale con le relative proprietà
- Concetto di somma algebrica

Abilità

- Ordinare numeri interi relativi
- Eseguire le operazioni con i numeri interi relativi e calcolare le potenze con esponente naturale
- Calcolare il valore di un'espressione nell'insieme dei numeri interi relativi

Per convenzione si considerano uguali i numeri $+0$ e -0; per tale motivo lo zero si indica solitamente senza segno e non si considera né positivo né negativo:

$$+0 = -0 = 0$$

I numeri positivi possono essere indicati anche senza segno: il segno + può essere sottinteso. I numeri interi relativi sono dunque

$$\ldots \quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2 \quad +3 \quad +4 \quad \ldots$$

ma si indicano anche così:

$$\ldots \quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots$$

Quindi

$$\mathbb{Z} = \{\ldots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\}$$

Il sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ formato dai numeri interi positivi e dallo zero può essere identificato con l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali; quindi i numeri naturali possono essere considerati un sottoinsieme dei numeri interi (**FIGURA 2**). Per questo motivo si dice anche che l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi è un *ampliamento* dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.

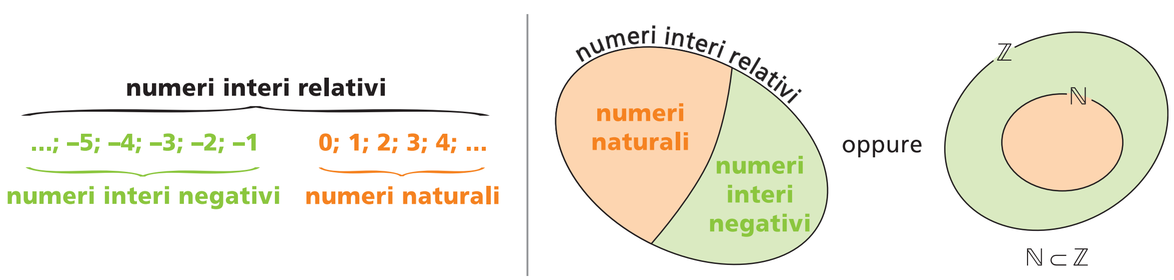

FIGURA 2

ESEMPI

1 $+3; +100; +12.345; 14; 1203$ sono numeri interi *positivi*
$-5231; -200; -5$ sono numeri interi *negativi*

2 $+3$ e $+12$ sono *concordi* -15 e -2 sono *concordi* 7 e 16 oppure $+4$ e 8 sono *concordi*
-6 e $+9$ sono *discordi* $+21$ e -1 sono *discordi* 5 e -9 sono *discordi*

2 Valore assoluto e numeri opposti

DEFINIZIONE VALORE ASSOLUTO

Si dice valore assoluto o *modulo* di un numero intero relativo, positivo o negativo, il numero stesso privato del suo segno.

DEFINIZIONE NUMERI OPPOSTI

Due numeri interi relativi con lo stesso valore assoluto e con segni diversi si dicono opposti.

- Il valore assoluto di un numero a si indica scrivendo $|a|$. Come abbiamo già detto nel PARAGRAFO 1, 0 si considera privo di segno; è quindi naturale estendere la definizione di valore assoluto anche al numero 0, scrivendo $|0| = 0$.
- L'opposto di un numero a, positivo o negativo, si ottiene **cambiandogli il segno**: se a è positivo il suo opposto è negativo, mentre se a è negativo il suo opposto è positivo. In generale l'opposto di un numero a, positivo o negativo, si indica premettendo a esso il segno $-$, cioè scrivendo $-a$; inoltre, poiché per convenzione $+0 = -0 = 0$, si considera come *opposto di 0 il numero 0 stesso*.

In base alle considerazioni precedenti, possiamo esprimere sinteticamente la definizione di valore assoluto di un numero a:

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \text{ è positivo} \\ -a & \text{se } a \text{ è negativo} \\ 0 & \text{se } a \text{ è uguale a zero} \end{cases}}$$

Notiamo infine che l'opposto dell'opposto di un numero è il numero dato, ossia $-(-a) = a$.

ESEMPI

1 Scriviamo il valore assoluto dei numeri $+4$, 10, -8: $|+4| = 4$; $|10| = 10$; $|-8| = 8$.
Ricordando che i numeri positivi possono anche essere scritti senza il segno $+$ che li precede, è evidente che possiamo scrivere uguaglianze del tipo $|+4| = +4$; $|10| = +10$; $|-8| = +8$.

2 $+5$ e -5 sono numeri opposti; 7 e -7 sono numeri opposti.
L'opposto di $+3$ è -3; l'opposto di 6 è -6; l'opposto di -2 è $+2$.
L'opposto di $+12$, che è -12, si può indicare con $-(+12)$; quindi è $-(+12) = -12$.
L'opposto di -9, che è $+9$, si può indicare con $-(-9)$; quindi è $-(-9) = +9 = 9$.

3 I diversi significati dei simboli + e –

Anche se non abbiamo ancora formulato le definizioni delle operazioni in $\mathbb{Z}$, è opportuno sottolineare che i due simboli $+$ e $-$ hanno diversi significati, che è importante non confondere.

- **Addizione e sottrazione**
  Quando vengono scritti tra due numeri, i due simboli $+$ e $-$ indicano, rispettivamente, le operazioni di addizione e sottrazione tra i numeri stessi.

Segno di un numero relativo
Quando vengono scritti davanti a un numero naturale, i due simboli + e − ne indicano il segno e trasformano un numero naturale in un numero intero relativo.

Oltre a ciò, bisogna considerare che il simbolo − può avere anche il seguente significato.

Opposto di un numero
Quando viene scritto davanti a un numero relativo, il simbolo − ne indica l'opposto.

In molti casi è opportuno, per evitare di confondere i vari significati dei simboli + e −, porre tra parentesi i numeri relativi quando sono preceduti da un segno; vedremo un'importante eccezione a questa regola nel PARAGRAFO 11, dedicato alla somma algebrica.
Vediamo alcuni esempi in cui si evidenziano i diversi significati dei simboli + e −.

ATTENZIONE!

Puoi scrivere	**Non** puoi scrivere
$-(+5)$	$- + 5$
$6 + (-2)$	$6 + -2$
$(-8) - (+2)$	$-8 - +2$
$(+2) - (-8)$	$+2 - -8$
$(+4) \cdot (-6)$	$+4 \cdot -6$

ESEMPI

1	$8 - 2$	il simbolo − indica l'operazione di sottrazione.
2	$12 + 5$	il simbolo + indica l'operazione di addizione.
3	$+12$; -21	i simboli + e − indicano il segno di numeri relativi.
4	$(-8) + (-2)$	i simboli − entro parentesi indicano il segno dei numeri relativi, mentre il simbolo + indica l'operazione di addizione tra i due numeri relativi tra parentesi.
5	$9 - (-3)$	il simbolo − che segue immediatamente il 9 indica una sottrazione, il simbolo − entro parentesi indica il segno di un numero relativo.
6	$-(-5)$	il simbolo − entro parentesi indica il segno di un numero relativo, il simbolo − davanti alla prima parentesi indica l'opposto di quel numero relativo: $-(-5) = +5$.
7	$-(+7)$	il simbolo + entro parentesi indica il segno di un numero relativo, il simbolo − davanti alla prima parentesi indica l'opposto di quel numero relativo: $-(+7) = -7$.
8	-10	osserviamo che, in casi come questo, il simbolo − che precede il 10 può essere interpretato in due modi diversi: • può indicare il segno di un numero relativo, che in questo caso è -10; • ricordando che il segno + dei numeri relativi si può sottintendere, -10 si può interpretare come $-(+10)$, che indica l'opposto del numero relativo $+10$, ossia -10. Tuttavia entrambe le interpretazioni conducono allo stesso risultato e quindi non c'è ambiguità.
9	$-(9 - 2 \cdot 3)$	in questo caso il simbolo − entro parentesi indica una sottrazione, mentre il simbolo − davanti alla prima parentesi indica l'opposto dell'espressione racchiusa tra parentesi.

4 Rappresentazione dei numeri interi relativi su una retta

Possiamo rappresentare l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi su una retta procedendo nel modo seguente. Scegliamo un punto qualsiasi sulla retta, al quale associamo il numero 0. Fissiamo poi un segmento di lunghezza $\boldsymbol{u}$, che sarà l'unità di misura delle lunghezze, e scegliamo un verso di percorrenza sulla retta: parleremo così di *retta orientata*.
Per fissare le idee, immaginiamo che la retta sia tracciata orizzontalmente su un foglio e che il verso prescelto, evidenziato da una punta di freccia, sia quello che va da sinistra a destra.
Identifichiamo poi il punto la cui distanza dal punto associato a 0 è uguale a $\boldsymbol{u}$ e che si trova, rispetto a esso, dalla parte del verso indicato dalla freccia, ossia a destra: associamo a tale punto il numero +1.

Facciamo poi, nello stesso verso e a partire dal punto associato a $+1$, un altro «passo» della stessa lunghezza e associamo, al punto così raggiunto, il numero $+2$. Continuando in questo modo troveremo gli altri punti cui associare i successivi numeri positivi $+3$, $+4$ ecc. Per trovare i punti cui associare i numeri negativi procediamo nello stesso modo, ma spostandoci nel verso opposto, cioè verso sinistra.

Nella rappresentazione dei numeri interi relativi su una retta, due numeri opposti sono sempre simmetrici rispetto al punto associato allo 0, ossia si trovano alla stessa distanza dal punto associato allo 0, ma da parti opposte (**FIGURA 3**).

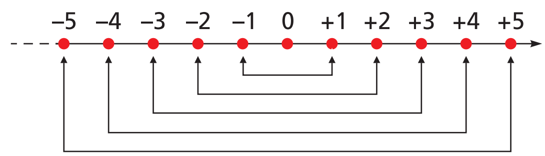

FIGURA 3 numeri opposti

5 L'ordinamento nell'insieme dei numeri interi relativi

La rappresentazione dei numeri interi relativi su una retta permette di comprendere l'ordinamento dell'insieme $\mathbb{Z}$.
Vediamo, ad esempio, che -1 precede $+2$ e che, in generale, i numeri negativi precedono i numeri positivi: diremo perciò che, tra due numeri discordi, il numero negativo è sempre minore di quello positivo.
Vediamo anche che $+3$ precede $+5$, e perciò $+3$ è minore di $+5$ (ossia $+5$ è maggiore di $+3$), mentre -5 precede -3 e perciò -5 è minore di -3 (ossia -3 è maggiore di -5) (**FIGURA 4**).

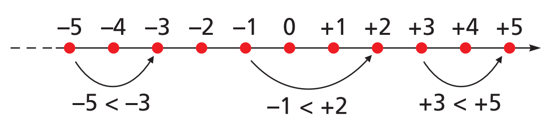

FIGURA 4

Possiamo quindi formulare le seguenti proposizioni.

- Tra due numeri discordi, il numero negativo è minore del numero positivo.
- Lo zero è maggiore di qualsiasi numero negativo e minore di qualsiasi numero positivo.
- Tra due numeri positivi il minore è quello che ha il minore valore assoluto.
- Tra due numeri negativi il minore è quello che ha il maggiore valore assoluto.

Come abbiamo indicato in **FIGURA 4**, i simboli che si utilizzano per esprimere le relazioni di disuguaglianza tra numeri interi relativi sono gli stessi che si utilizzano per i numeri naturali e che abbiamo già incontrato nell'**UNITÀ 1**.

ESEMPIO

Vogliamo scrivere in ordine crescente, ossia dal minore al maggiore, i seguenti numeri interi:

$$+8 \qquad -2 \qquad -21 \qquad 0 \qquad +100 \qquad -10 \qquad +12$$

Sappiamo che i numeri negativi devono precedere lo zero, mentre i numeri positivi lo devono seguire.
Cominciamo perciò a esaminare i numeri negativi. Essi sono -2, -21, -10. Consideriamo i loro valori assoluti: 2, 21, 10. Il minore fra i tre numeri negativi è quello che ha il valore assoluto maggiore, ossia -21; tra i due rimanenti, cioè -2 e -10, quello che ha maggiore valore assoluto è -10.
Dunque i numeri negativi devono essere posti in quest'ordine: -21, -10, -2. A essi devono seguire 0 e poi i numeri positivi, nell'ordine dato dal loro valore assoluto, ossia $+8$, $+12$, $+100$.
Quindi, scrivendo in ordine crescente i numeri dati, otteniamo:

$$-21 \qquad -10 \qquad -2 \qquad 0 \qquad +8 \qquad +12 \qquad +100$$

6 Proprietà dell'insieme dei numeri interi relativi

- L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi gode delle seguenti proprietà.
  - L'insieme dei numeri interi è infinito.
  - Ogni numero intero ha un successivo.
  - Ogni numero intero ha un precedente.
  - L'insieme dei numeri interi non ha un elemento minimo.
  - L'insieme dei numeri interi non ha un elemento massimo.
- È importante notare le differenze tra le proprietà di $\mathbb{Z}$ e quelle di $\mathbb{N}$.
  Nella **TABELLA 1** evidenziamo le differenti proprietà dei due insiemi.

TABELLA 1

proprietà di $\mathbb{N}$	proprietà di $\mathbb{Z}$
L'insieme dei numeri naturali è infinito.	L'insieme dei numeri interi è infinito.
Ogni numero naturale ha un successivo.	Ogni numero intero ha un successivo.
Ogni numero naturale, eccetto lo zero, ha un precedente.	**Ogni numero intero ha un precedente.**
Lo zero è l'elemento minimo dell'insieme dei numeri naturali.	**L'insieme dei numeri interi non ha un elemento minimo.**
L'insieme dei numeri naturali non ha un elemento massimo.	L'insieme dei numeri interi non ha un elemento massimo.

Le operazioni aritmetiche con i numeri interi relativi

7 Addizione

L'addizione, che si indica con il simbolo $+$, è un'operazione che si esegue tra due numeri, detti **addendi**. Il risultato dell'addizione si chiama **somma**.

DEFINIZIONE SOMMA

- La somma di due *numeri* interi relativi *concordi* è il numero intero relativo che ha per segno lo stesso segno degli addendi e per valore assoluto la somma dei valori assoluti degli addendi.
- La somma di due *numeri* interi relativi *discordi* è il numero intero relativo che ha per segno il segno dell'addendo maggiore in valore assoluto e per valore assoluto la differenza tra il maggiore e il minore dei valori assoluti degli addendi.
- La somma di due *numeri opposti* è zero.

ESEMPI

Eseguiamo le seguenti addizioni.

1 $(+12)+(+4)$

I due addendi sono concordi. Il segno della somma è perciò quello dei due addendi, ossia $+$. Calcoliamo quindi la somma dei loro valori assoluti, determinando così il valore assoluto della somma: $12+4=16$. Perciò si ha

$$(+12)+(+4)=+(12+4)=+16$$

Osserviamo che la somma di due numeri interi positivi si può calcolare come la somma di due numeri naturali: omettendo il segno $+$ dei singoli addendi, essa diventa $12+4=16$.

2 $(-12)+(-4)$

I due addendi sono concordi. Il segno della somma è perciò quello dei due addendi, ossia $-$. Calcoliamo quindi la somma dei loro valori assoluti, determinando così il valore assoluto della somma: $12+4=16$. Perciò si ha

$$(-12)+(-4)=-(12+4)=-16$$

3 $(+12)+(-4)$

I due addendi sono discordi. Il segno della somma è $+$, ossia quello dell'addendo maggiore in valore assoluto, che è $+12$. Calcoliamo la differenza tra il maggiore e il minore dei due valori assoluti, determinando così il valore assoluto della somma: $12-4=8$. Perciò si ha

$$(+12)+(-4)=+(12-4)=+8$$

4 $(-12)+(+4)$

I due addendi sono discordi. Il segno della somma è $-$, ossia quello dell'addendo maggiore in valore assoluto, che è -12. Calcoliamo la differenza tra il maggiore e il minore dei due valori assoluti, determinando così il valore assoluto della somma: $12-4=8$. Perciò si ha

$$(-12)+(+4)=-(12-4)=-8$$

5 $(+15)+(-15)$

I due addendi sono opposti, quindi la loro somma è zero:

$$(+15)+(-15)=0$$

8 Proprietà dell'addizione

L'addizione tra numeri interi relativi gode delle stesse proprietà dell'addizione tra numeri naturali.

- La **proprietà commutativa** permette di cambiare l'ordine degli addendi:

$$a+b=b+a$$

- La **proprietà associativa** permette di calcolare la somma di tre o più addendi:

$$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)$$

- L'**elemento neutro** dell'addizione è lo zero:

$$a+0=0+a=a$$

Grazie alle proprietà commutativa e associativa possiamo indicare somme di tre o più addendi e calcolarle cambiando l'ordine degli addendi e associandoli a piacimento.

ESEMPI

1 $(+2)+(-5)=\mathbf{-3}$ oppure $(-5)+(+2)=\mathbf{-3}$.

2 Per calcolare $(+2)+(-5)+(-4)$ possiamo procedere in due modi:

$[(+\mathbf{2})+(-\mathbf{5})]+(-4)=(-\mathbf{3})+(-4)=\mathbf{-7}$ oppure $(+2)+[(-\mathbf{5})+(-\mathbf{4})]=(+2)+(-\mathbf{9})=\mathbf{-7}$

9 Sottrazione

La sottrazione, che si indica con il simbolo –, è un'operazione che si esegue tra due numeri, considerati nell'ordine, il primo detto **minuendo** e il secondo **sottraendo**. Il risultato della sottrazione si chiama **differenza**.

DEFINIZIONE DIFFERENZA

La differenza di due numeri interi relativi è la somma del minuendo con l'opposto del sottraendo.

ESEMPI

1. $(+12) - (+4) = (+12) + (-4) = +8$
2. $(+12) - (-4) = (+12) + (+4) = +16$
3. $(-12) - (+4) = (-12) + (-4) = -16$
4. $(-12) - (-4) = (-12) + (+4) = -8$
5. $(+18) - (+18) = (+18) + (-18) = 0$
6. $(-18) - (-18) = (-18) + (+18) = 0$

Quando eseguiamo una sottrazione tra numeri positivi, possiamo omettere il segno + davanti a essi, scrivendo, ad esempio, $12 - 4$ al posto di $(+12) - (+4)$. In questo caso la differenza che otteniamo è ovviamente la stessa che si trova eseguendo la sottrazione tra i numeri naturali 12 e 4.

- Consideriamo ora il secondo degli esempi precedenti; osserviamo che

$$\underbrace{(+12)}_{\text{minuendo}} - \underbrace{(-4)}_{\text{sottraendo}} = \underbrace{+16}_{\text{differenza}} \qquad \underbrace{(+12)}_{\text{minuendo}} = \underbrace{(-4)}_{\text{sottraendo}} + \underbrace{(+16)}_{\text{differenza}}$$

Puoi verificare anche su altri esempi che, come accade nella sottrazione tra numeri naturali, anche per i numeri interi relativi *la differenza è il numero che addizionato al sottraendo dà per somma il minuendo*. In particolare

- sottraendo da un numero il numero stesso si ottiene zero;
- sottraendo zero da un numero si ottiene il numero stesso.

IMPORTANTE

Nell'insieme dei numeri relativi, un'espressione come $5 - 3$ può essere considerata

- una **sottrazione**:
  $(+5) - (+3)$
- un'**addizione**:
  $(+5) + (-3)$

- Infine, è importante notare che, **nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi, la sottrazione si può sempre eseguire**, qualunque siano il minuendo e il sottraendo.

10 Proprietà della sottrazione

- Anche per la sottrazione tra numeri interi relativi vale la **proprietà invariantiva**: se si somma o si sottrae uno stesso numero al minuendo e al sottraendo, la differenza non cambia:

$$a - b = (a + c) - (b + c) \qquad a - b = (a - c) - (b - c)$$

- La sottrazione **non** gode delle proprietà *commutativa* e *associativa* e **non** ha *elemento neutro*.

ESEMPIO

Verifichiamo, mediante un esempio, la proprietà invariantiva della sottrazione, ossia verifichiamo che

$$(-8) - (+5) = [(-8) + (-2)] - [(+5) + (-2)]$$

Infatti risulta

$$(-8) - (+5) = (-8) + (-5) = -13$$

e anche

$$[(-8) + (-2)] - [(+5) + (-2)] = (-10) - (+3) = (-10) + (-3) = -13$$

11 Somma algebrica

Si chiama **somma algebrica** la somma di due o più numeri relativi.
Ad esempio è una somma algebrica l'espressione

$$5 + (-10) + 3$$

Sappiamo che la sottrazione tra numeri interi relativi si può considerare un'addizione:

$$5 - 10 = 5 + (-10)$$

Questa osservazione permette di semplificare la scrittura delle somme algebriche, limitando l'uso delle parentesi: invece di $5 + (-10) + 3$ si può scrivere $5 - 10 + 3$.
Ricorda, comunque, che questo modo di scrivere una somma algebrica deve essere considerato una sorta di abbreviazione: scriviamo $5 - 10 + 3$, ma pensiamo $5 + (-10) + 3$. Solo così potrai applicare correttamente a tali espressioni le proprietà commutativa e associativa, che valgono per l'addizione ma non per la sottrazione.
Per calcolare il valore di una somma algebrica si può procedere in due modi.

- **Primo metodo**
  Si calcolano la somma dei valori assoluti di tutti i termini positivi e la somma dei valori assoluti di tutti i termini negativi; successivamente si esegue la sottrazione tra la prima somma e la seconda.
- **Secondo metodo**
  Si eseguono di seguito le addizioni indicate dai segni $+$ e le sottrazioni indicate dai segni $-$, nell'ordine in cui esse si presentano.

ESEMPI

1 Scrivendo

$$-7 + 12 + 5 - 20$$

si indica la somma algebrica dei numeri -7, $+12$, $+5$, -20:

$$-7 + 12 + 5 - 20 = (-7) + (+12) + (+5) + (-20)$$

2 Calcoliamo ora la somma algebrica $-7 + 12 + 5 - 20$.

- **Primo metodo**
  La somma dei valori assoluti dei termini positivi è $12 + 5 = 17$.
  La somma dei valori assoluti dei termini negativi è $7 + 20 = 27$.
  Eseguiamo la sottrazione: $17 - 27 = \mathbf{-10}$.
- **Secondo metodo**
  Eseguiamo nell'ordine le addizioni e le sottrazioni indicate:

$$\overbrace{-7 + 12}^{(-7)+(+12)=+5} + 5 - 20 = \underbrace{5 + 5}_{(+5)+(+5)=+10} - 20 = 10 - 20 = \mathbf{-10}$$

Ovviamente in entrambi i casi otteniamo lo stesso risultato:

$$-7 + 12 + 5 - 20 = -10$$

12 Somma algebrica e proprietà commutativa

Come abbiamo detto, una somma algebrica si può considerare un'addizione. Le proprietà dell'addizione valgono quindi anche nelle somme algebriche. Vale in particolare la proprietà commutativa; per applicarla si deve ricordare che il segno $+$ davanti al primo termine può essere omesso.

ESEMPI

1 $1 + 2 - 3 - 4 = 1 - 3 + 2 - 4$

Abbiamo scambiato di posto il secondo e il terzo termine. Ciascuno dei due conserva il proprio segno.

2 $-7 + 12 + 5 - 20 = 12 + 5 - 7 - 20$

Il primo termine, -7, viene portato al terzo posto. Il secondo termine, $+12$, passa così al primo posto e può perciò essere scritto senza il segno $+$.

3 $2 - 5 - 8 + 9 = -5 - 8 + 9 + 2$

Il primo termine, 2, viene portato all'ultimo posto e lo si scrive con il segno $+$. Il secondo termine -5 passa così al primo posto, e conserva il segno $-$ che non si può omettere.

RICORDA!

In una somma algebrica si può cambiare a piacere l'ordine dei termini, seguendo queste regole:

- ogni termine deve conservare il proprio segno;
- quando un termine viene portato al primo posto, se è positivo si può scrivere senza segno, se è negativo occorre scrivere davanti a esso il segno $-$;
- quando si sposta il termine che si trova al primo posto, se non è preceduto da un segno, esso dovrà essere scritto con il segno $+$.

13 Somma algebrica ed eliminazione delle parentesi

Un termine di una somma algebrica può essere, a sua volta, una somma algebrica racchiusa tra parentesi, come nelle seguenti espressioni:

$$12 + (3 + 5 - 2) - 7 - 21 \qquad -7 + 12 - [41 - (-9 - 4 + 2) + 5] + 2$$

- Per liberare una somma algebrica da una coppia di parentesi:
  - se la prima parentesi è preceduta dal segno $+$, si riscrivono i termini contenuti nella coppia con il loro segno;
  - se la prima parentesi è preceduta dal segno $-$, si riscrivono i termini contenuti nella coppia con il segno cambiato.

Se il primo termine non è preceduto da un segno, lo si deve considerare positivo.

ESEMPI

1 Liberiamo dalle parentesi l'espressione $12 + (3 + 5 - 2) - 7 - 21$.

L'espressione data contiene solo una coppia di parentesi tonde, preceduta dal segno $+$. È quindi sufficiente eliminare le parentesi, senza cambiare i segni dei termini contenuti al loro interno:

$$12 + (3 + 5 - 2) - 7 - 21 = 12 + 3 + 5 - 2 - 7 - 21 = -10$$

2 Liberiamo dalle parentesi l'espressione $-7 + 12 - [41 - (-9 - 4 + 2) + 5] + 2$.

- Per liberare questa espressione dalle parentesi occorrono due passaggi. Dapprima eliminiamo le parentesi tonde; poiché la prima tonda è preceduta dal segno $-$, i termini contenuti nella coppia di tonde si riscrivono con il segno cambiato:

$$-7 + 12 - [41 - (-9 - 4 + 2) + 5] + 2 = -7 + 12 - [41 + 9 + 4 - 2 + 5] + 2$$

Ora eliminiamo le parentesi quadre. Anche in questo caso cambiamo il segno dei termini contenuti al loro interno:

$$-7 + 12 - [41 + 9 + 4 - 2 + 5] + 2 = -7 + 12 - 41 - 9 - 4 + 2 - 5 + 2 = -50$$

- Per liberare l'espressione dalle parentesi, possiamo anche operare in modo diverso. Cominciamo a eliminare le parentesi quadre, considerando la somma algebrica scritta all'interno delle parentesi tonde come *un unico termine preceduto dal segno* −:

$$-7+12-[41-(-9-4+2)+5]+2=-7+12-41+(-9-4+2)-5+2$$

Osserviamo che il segno che precedeva la coppia di parentesi tonde è stato cambiato, ma non sono cambiati i segni dei termini contenuti in essa. Eliminiamo ora le parentesi tonde:

$$-7+12-41+(-9-4+2)-5+2=-7+12-41-9-4+2-5+2=-50$$

14 Moltiplicazione

Già sappiamo che la moltiplicazione è un'operazione che si esegue tra due numeri, detti **fattori**. Il risultato della moltiplicazione si chiama **prodotto**.

DEFINIZIONE PRODOTTO

Il prodotto di due numeri interi relativi è il numero intero relativo che ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei due fattori e per segno il segno + se i due fattori sono concordi, il segno − se sono discordi.

La regola, mediante la quale si determina il segno di un prodotto, è la nota **regola dei segni**, che riassumiamo nella TABELLA 2.

ESEMPI

Eseguiamo le seguenti moltiplicazioni.

1 $(+3)\cdot(+4)$

I due fattori sono concordi, quindi il segno del prodotto è +. Calcoliamo poi il prodotto dei valori assoluti dei due fattori: $3\cdot 4=12$. Il valore assoluto del prodotto perciò è 12. Concludiamo che

$$(+3)\cdot(+4)=+12$$

2 $(-5)(+2)$

I due fattori sono discordi, quindi il segno del prodotto è −. Il prodotto dei valori assoluti dei due fattori è $5\cdot 2=10$. Perciò risulta

$$(-5)(+2)=-10$$

3 $(-6)\cdot(-3)$

I due fattori sono concordi, quindi il segno del prodotto è +. Il prodotto dei valori assoluti dei due fattori è $6\cdot 3=18$.
Perciò risulta

$$(-6)\cdot(-3)=+18$$

TABELLA 2

$+\cdot+=+$
$+\cdot-=-$
$-\cdot+=-$
$-\cdot-=+$

IMPORTANTE

Il simbolo di moltiplicazione tra due espressioni contenute in parentesi può essere omesso. Invece di scrivere

$$(+3)\cdot(+4)$$

potremo anche scrivere

$$(+3)(+4)$$

Analogamente, invece di scrivere

$$7\cdot(-8)$$

potremo scrivere

$$7(-8)$$

GIUSTIFICHIAMO LA REGOLA DEI SEGNI

Poiché i numeri interi relativi positivi si possono identificare con i numeri naturali maggiori di 0, è intuitivamente evidente che si può ammettere che il prodotto di due numeri positivi sia positivo.
Vediamo ora quale segno deve avere il prodotto di due numeri discordi.
Poiché nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali vale la *proprietà distributiva* della moltiplicazione rispetto all'addizione, tale legge dovrà ovviamente valere anche nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi, che è un *ampliamento* di $\mathbb{N}$. Supponiamo, ad esempio, di dover calcolare il valore dell'espressione

$$E = (+4) \cdot [(+5) + (-2)] \qquad \boxed{1}$$

Eseguendo il calcolo entro le parentesi quadre, ricaviamo subito il valore di E:

$$E = (+4) \cdot (+3) = +12$$

Dovremo perciò ottenere $+12$ anche calcolando il valore di E con l'applicazione della proprietà distributiva. Avremo allora, dalla $\boxed{1}$,

$$E = (+4) \cdot (+5) + (+4) \cdot (-2) = +20 + (+4) \cdot (-2) = \begin{cases} +20 + (-8) = +12 & \text{se supponiamo } (+4)(-2) = -8 \\ +20 + (+8) = +28 & \text{se supponiamo } (+4)(-2) = +8 \end{cases}$$

Come puoi notare, per ottenere ancora $E = +12$ dobbiamo convenire che risulti

$$(+4) \cdot (-2) = -8$$

Quindi il prodotto di due numeri discordi *deve* essere negativo.
Ora prova tu a costruirti un esempio dal quale dedurre che il prodotto di due numeri negativi deve essere positivo.

15 Proprietà della moltiplicazione

La moltiplicazione, nell'insieme dei numeri interi relativi, gode delle stesse proprietà già introdotte nell'UNITÀ 1 per i numeri naturali.

- **Proprietà commutativa**. Permette di cambiare l'ordine dei fattori:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

- **Proprietà associativa**. Permette di calcolare il prodotto di tre o più fattori:

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

- **Proprietà distributiva** della moltiplicazione *rispetto all'addizione*:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

- **Proprietà distributiva** della moltiplicazione *rispetto alla sottrazione*:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

- **Elemento neutro**. L'elemento neutro della moltiplicazione è il numero 1:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

- **Elemento annullatore**. Lo zero è l'elemento annullatore della moltiplicazione:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

- **Legge di annullamento del prodotto**:

se $a \cdot b = 0$ **allora** $a = 0$ oppure $b = 0$ o anche $a = b = 0$

ESEMPIO

Verifichiamo la proprietà distributiva rispetto alla sottrazione.

Si ha $(-5) \cdot [(+7) - (-2)] = (-5)(+9) = -45$

e anche $(-5) \cdot (+7) - (-5) \cdot (-2) = (-35) - (+10) = -45$

Quindi è $(-5) \cdot [(+7) - (-2)] = (-5) \cdot (+7) - (-5) \cdot (-2)$

Prova ora tu, come esercizio, a verificare le altre proprietà.

16 Prodotto di tre o più fattori

La proprietà commutativa e la proprietà associativa della moltiplicazione ci permettono di calcolare il prodotto di tre o più fattori; possiamo eseguire queste moltiplicazioni cambiando l'ordine dei fattori e associandoli a nostro piacimento.

Regola

Il prodotto di tre o più numeri interi relativi è il numero intero relativo che ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei fattori e, per segno, il segno $+$ se il numero dei fattori negativi è pari, il segno $-$ se il numero dei fattori negativi è dispari.

ESEMPI

1 Calcoliamo $(-3) \cdot (-5) \cdot (+3) \cdot (-10) \cdot (-1) \cdot (+2)$.

A Il prodotto dei valori assoluti dei fattori è $3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 2 = 900$. Il valore assoluto del prodotto è 900.

B Contiamo i fattori negativi. Essi sono quattro, in numero pari; perciò il segno del prodotto è $+$.

C Possiamo concludere che

$$(-3) \cdot (-5) \cdot (+3) \cdot (-10) \cdot (-1) \cdot (+2) = +900$$

2 Calcoliamo $(-2) \cdot (+3) \cdot (-3) \cdot (+12) \cdot (-10) \cdot (-1) \cdot (-20)$.

A Il prodotto dei valori assoluti dei fattori è $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 20 = 43.200$. Il valore assoluto del prodotto è 43.200.

B Contiamo i fattori negativi. Essi sono cinque, in numero dispari; perciò il segno del prodotto è $-$.

C Possiamo concludere che

$$(-2) \cdot (+3) \cdot (-3) \cdot (+12) \cdot (-10) \cdot (-1) \cdot (-20) = -43.200$$

17 Divisione

Come già visto nell'insieme $\mathbb{N}$, la divisione è un'operazione che si esegue tra due numeri, considerati nell'ordine, il primo detto **dividendo** e il secondo **divisore**. Il risultato della divisione si chiama **quoto** o **quoziente esatto**.

DEFINIZIONE QUOTO

Il quoto di due numeri interi relativi, di cui il secondo diverso da zero, è il numero intero relativo, se esiste, che ha per valore assoluto il quoto della divisione tra i valori assoluti del dividendo e del divisore e, per segno, il segno $+$ se i due numeri sono concordi, il segno $-$ se sono discordi.

Per determinare il segno di un quoto si utilizza la regola dei segni già vista a proposito della moltiplicazione.
La divisione tra due numeri interi relativi è possibile se lo è la divisione tra i valori assoluti del dividendo e del divisore, ossia se il valore assoluto del dividendo è divisibile per il valore assoluto del divisore. In $\mathbb{Z}$ la divisione è un'operazione non ovunque definita.
Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi non definiremo la divisione con resto.

ESEMPI

Eseguiamo le seguenti divisioni.

1 $(+8) : (+4)$

Dividendo e divisore sono concordi, quindi il segno del quoto è $+$. Calcoliamo il quoto dei valori assoluti dei due fattori, che è $8 : 4 = 2$. Quindi il valore assoluto del quoto è 2.

Perciò risulta $(+8) : (+4) = +2$

2 $(-15):(+3)$

Dividendo e divisore sono discordi, quindi il segno del quoto è $-$. Il quoto dei valori assoluti è $15:3=5$.

Perciò risulta $(-15):(+3)=-5$

3 $(-16):(-4)$

Dividendo e divisore sono concordi, quindi il segno del quoto è $+$. Il quoto dei valori assoluti è $16:4=4$.

Perciò risulta $(-16):(-4)=+4$

- Consideriamo ora il secondo degli esempi precedenti; puoi osservare che si ha

$$\underset{\text{dividendo}}{(-15)} : \underset{\text{divisore}}{(+3)} = \underset{\text{quoto}}{-5} \qquad \underset{\text{dividendo}}{(-15)} = \underset{\text{divisore}}{(+3)} \cdot \underset{\text{quoto}}{(-5)}$$

dividendo : **divisore** = **quoto** — **dividendo** = **divisore** · **quoto**

Come puoi verificare anche su altri esempi, e come accade nella divisione tra numeri naturali, *il quoto tra due numeri relativi è il numero che moltiplicato per il divisore dà per prodotto il dividendo*.

- Anche nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi si ha che
  - $a:1=a$
  - $a:a=1$, con $a \neq 0$
  - $0:a=0$, con $a \neq 0$
  - $a:0$ non si può eseguire (la divisione per 0 non ha senso, non ha significato).

18 Proprietà della divisione

La divisione, nell'insieme dei numeri interi relativi, gode delle stesse proprietà già introdotte nell'**UNITÀ 1** per i numeri naturali.

- **Proprietà invariantiva**:

$$a:b=(a\cdot c):(b\cdot c) \qquad a:b=(a:c):(b:c)$$

- **Proprietà distributiva** della divisione *rispetto all'addizione*:

$$(a+b):c=a:c+b:c$$

- **Proprietà distributiva** della divisione *rispetto alla sottrazione*:

$$(a-b):c=a:c-b:c$$

ATTENZIONE!

La proprietà distributiva vale solo se il simbolo di divisione è scritto a destra dell'addizione o della sottrazione, come già avevamo visto nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali:

$$a:(b+c) \neq a:b+a:c$$

È evidente che le precedenti proprietà valgono solo se tutte le divisioni indicate sono possibili.

- La divisione **non** gode delle proprietà *commutativa* e *associativa* e *non* ha *elemento neutro*.

ESEMPIO

Verifichiamo la proprietà invariantiva della divisione.

Si ha $(+24):(-6)=-4$

e anche $[(+24):(-3)]:[(-6):(-3)]=(-8):(+2)=-4$

Quindi $(+24):(-6)=[(+24):(-3)]:[(-6):(-3)]$

Prova ora tu, come esercizio, a verificare le altre proprietà.

Le potenze

19 Definizione di potenza

DEFINIZIONE **POTENZA**

La potenza che ha per base il numero intero relativo a e per esponente il numero naturale n si indica con a^n ed è uguale al prodotto di n fattori uguali ad a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fattori}}$$

Attenzione! Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi le potenze hanno significato solo se l'esponente è un numero naturale.

Anche in $\mathbb{Z}$, come in $\mathbb{N}$, si ha che

- le potenze con base 1 sono uguali a 1:

$$1^n = 1$$

- le potenze con base 0 ed esponente diverso da 0 sono uguali a 0:

$$0^n = 0 \quad \text{con } n \neq 0$$

- le potenze con esponente 1 sono uguali alla base:

$$a^1 = a$$

- le potenze con esponente 0 e base diversa da 0 sono uguali a 1:

$$a^0 = 1 \quad \text{con } a \neq 0$$

- la potenza con base 0 ed esponente 0 non ha senso:

$$0^0 \text{ non ha significato}$$

ESEMPI

1. $(+5)^3 = (+5) \cdot (+5) \cdot (+5) = +125 = 125$
2. $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (+4) \cdot (-2) = -8$
3. $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = (+4)(-2)(-2) = (-8)(-2) = +16$
4. $(-3)^2 = (-3)(-3) = +9$

In base ai risultati nei precedenti esempi vediamo che, per calcolare la potenza di un numero intero relativo, puoi applicare la regola seguente.

Regola

Per calcolare la potenza di un numero intero relativo, si calcola la potenza del valore assoluto della base; essa sarà il valore assoluto della potenza. Se la base ha segno $+$, anche la potenza ha segno $+$; se invece la base ha segno $-$, la potenza ha segno $+$ se l'esponente è pari e segno $-$ se l'esponente è dispari.

ESEMPI

5 Calcoliamo $(+5)^3$.

Il valore assoluto della base è 5 ed è $5^3 = 125$. Poiché la base è positiva, anche la sua potenza è positiva:

$$(+5)^3 = +5^3 = 125$$

6 Calcoliamo $(-2)^4$.

Il valore assoluto della base è 2 ed è $2^4 = 16$. Poiché la base è negativa e l'esponente è pari, la potenza è positiva:

$$(-2)^4 = +2^4 = +16$$

7 Calcoliamo $(-3)^3$.

Il valore assoluto della base è 3 ed è $3^3 = 27$. Poiché la base è negativa e l'esponente è dispari, la potenza è negativa:

$$(-3)^3 = -3^3 = -27$$

8 Calcoliamo $(-2)^4 \cdot (-3)^3 \cdot (+10) \cdot (-5)$.

- Si tratta di un prodotto di quattro fattori. Come abbiamo appena visto, il fattore $(-2)^4$ è positivo, mentre $(-3)^3$ è negativo.
  - Calcoliamo il prodotto dei valori assoluti dei fattori:
  $$2^4 \cdot 3^3 \cdot 10 \cdot 5 = 21.600$$
  Il valore assoluto del prodotto è 21.600.
  - Tenendo presente che $(-2)^4$ è positivo e $(-3)^3$ è negativo, ci sono 2 fattori negativi, ossia $(-3)^3$ e (-5). Il prodotto ha quindi segno $+$.

  Possiamo concludere che
  $$(-2)^4 \cdot (-3)^3 \cdot (+10) \cdot (-5) = \mathbf{+21.600}$$
  Per determinare il segno del prodotto, potevamo procedere in un altro modo. $(-2)^4$ rappresenta 4 fattori negativi e $(-3)^3$ rappresenta 3 fattori negativi. Tenendo conto anche del fattore -5, si hanno $4 + 3 + 1 = 8$ fattori negativi e quindi anche in questo modo troviamo che il prodotto ha segno $+$.
- Per calcolare $(-2)^4 \cdot (-3)^3 \cdot (+10) \cdot (-5)$ possiamo anche procedere così:
$$(-2)^4 \cdot (-3)^3 \cdot (+10) \cdot (-5) = (+16) \cdot (-27) \cdot (+10) \cdot (-5) = +(16 \cdot 27 \cdot 10 \cdot 5) = \mathbf{+21.600}$$

RICORDA!

- La potenza di un numero positivo è sempre positiva.
- La potenza di un numero negativo con esponente pari è positiva.
- La potenza di un numero negativo con esponente dispari è negativa.

	***n* pari**	***n* dispari**
$a > 0$	$a^n > 0$	$a^n > 0$
$a < 0$	$\mathbf{a^n > 0}$	$a^n < 0$

Osserviamo anche che se n è un numero pari o dispari, allora

- $2 \cdot n$, cioè $2n$, è *pari*;
- $2n + 1$ è *dispari*.

Quindi, se n è un numero naturale,

$2n \longrightarrow$ pari

$2n + 1 \longrightarrow$ dispari

La precedente tabella può pertanto essere così modificata.

$a > 0$	$a^{2n} > 0$	$a^{2n+1} > 0$
$a < 0$	$\mathbf{a^{2n} > 0}$	$a^{2n+1} < 0$

IMPORTANTE

Le potenze hanno la priorità sulle altre operazioni; in un'espressione, se non vi sono parentesi, le potenze vanno calcolate prima di eseguire le altre operazioni. In particolare, richiamiamo l'attenzione su espressioni del seguente tipo:

$$\mathbf{-5^2} \quad \text{e} \quad \mathbf{(-5)^2}$$

Nella prima si deve calcolare innanzitutto la potenza $5^2 = 25$ e poi, come indicato dal segno meno, considerare l'opposto del risultato, ossia -25. Nella seconda, invece, le parentesi indicano che si deve elevare alla seconda potenza il numero negativo -5, ottenendo $(-5) \cdot (-5) = +25$. Perciò si ha

$$\mathbf{-5^2 = -25} \qquad \mathbf{(-5)^2 = +25}$$

20 Proprietà delle potenze

Le proprietà delle potenze, già studiate nell'**UNITÀ 1**, valgono anche per le potenze che hanno per base un numero intero relativo e per esponente un numero naturale. Ci limitiamo qui a riassumerle.

$$
\begin{array}{ll}
a^m \cdot a^n = a^{m+n} & \\
a^m : a^n = a^{m-n} & \text{con } a \neq 0,\ m \geq n \\
(a^m)^n = a^{m \cdot n} & \\
a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m & \\
a^m : b^m = (a : b)^m & \text{con } b \neq 0
\end{array}
$$

Nelle formule sopra scritte, i valori delle lettere a, b, m, n devono essere tali che le potenze indicate non si presentino mai nella forma 0^0 che, come sappiamo, non ha significato.

- Anche per i numeri interi relativi è importante ricordare che

$$a^n + b^n \neq (a+b)^n$$

- Sappiamo che la potenza con esponente pari di un numero positivo o negativo è sempre un numero positivo. Ad esempio

$$(-3)^4 = +81 \qquad (+3)^4 = +81$$

Quindi risulta

$$(-3)^4 = (+3)^4$$

Questo risultato si può generalizzare.
Una potenza con esponente pari non cambia se si cambia il segno della base:

$$(-a)^{2n} = (+a)^{2n}$$

Ovviamente nella precedente uguaglianza a ed n non possono essere entrambi nulli e $2n$ indica un generico numero naturale pari.

ESEMPI

1 $(-2)^3 \cdot (-2)^2 \cdot (-2)^5 = (-2)^{3+2+5} = (-2)^{10} = 2^{10} = 1024$

2 $(-3)^8 : (-3)^3 = (-3)^{8-3} = (-3)^5 = -3^5 = -243$

3 $(-5^4)^6 = (-5)^{4 \cdot 6} = (-5)^{24} = +5^{24} = 5^{24}$

4 $(-3)^5 \cdot 7^5 \cdot (-2)^5 = [(-3) \cdot (+7) \cdot (-2)]^5 = (+42)^5 = +42^5 = 42^5$

5 $24^5 : (-6)^5 = [(+24) : (-6)]^5 = (-4)^5 = -4^5 = -1024$

6 Esprimiamo come unica potenza il prodotto $(-5)^3 \cdot (+5)^4$.

- Le basi delle due potenze sono opposte e quindi non possiamo procedere subito alla somma degli esponenti. Osserviamo però che la potenza $(+5)^4$ ha esponente pari, e quindi possiamo cambiare il segno della base: $(+5)^4 = (-5)^4$. In tal modo il prodotto voluto si riconduce a un prodotto di potenze della stessa base -5 e quindi si può calcolare sommando gli esponenti:

$$(-5)^3 \cdot (+5)^4 = (-5)^3 \cdot (-5)^4 = (-5)^{3+4} = (-5)^7 = -5^7$$

- Per calcolare $(-5)^3 \cdot (+5)^4$ avremmo potuto anche procedere così:

$$(-5)^3 \cdot (+5)^4 = (-5^3) \cdot 5^4 = -(5^3 \cdot 5^4) = -5^{3+4} = -5^7$$

Espressioni

21 Espressioni con i numeri interi relativi

Le regole per calcolare il valore di espressioni con i numeri interi relativi non sono diverse da quelle viste nell'**UNITÀ 1** a proposito dei numeri naturali. In particolare, si deve rispettare la priorità delle operazioni e tenere conto delle parentesi. Si deve poi ricordare la definizione di somma algebrica e le sue proprietà, tenendo conto che i termini di una somma algebrica possono essere, a loro volta, espressioni.

ESEMPI

1 Calcoliamo il valore dell'espressione $-3+2\cdot(-5)^2$.

Dobbiamo calcolare prima la potenza: $(-5)^2=+25$; sostituiamo quindi 25, omettendo il segno +, al posto di $(-5)^2$:

$$-3+2\cdot(-5)^2=-3+2\cdot 25$$

Eseguiamo ora la moltiplicazione $2\cdot 25=50$ e poi la somma algebrica:

$$-3+2\cdot 25=-3+50=47$$

2 Calcoliamo il valore dell'espressione $6-3\cdot(-2)^3$.

Calcoliamo dapprima la potenza $(-2)^3=-8$ e sostituiamo il risultato nell'espressione. In questo caso, poiché il segno − non si può omettere, dobbiamo scrivere −8 tra parentesi:

$$6-3\cdot(-2)^3=6-3\cdot(-8)$$

Possiamo interpretare questa somma algebrica sia come $6-(+3)\cdot(-8)$ sia come $6+[(-3)\cdot(-8)]$. Nel primo caso otteniamo $6-(-24)$, nel secondo $6+24$. Ovviamente troviamo lo stesso risultato:

$$6-(-24)=6+24=30$$

3 Calcoliamo il valore dell'espressione $5-[2-(-6)\cdot 4:(-8)+6]$. $\boxed{1}$

- Entro le parentesi quadre è contenuta una somma algebrica. Uno dei termini di questa somma è l'espressione $(-6)\cdot 4:(-8)$, costituita da un prodotto e da un quoziente. Dobbiamo calcolare il valore di tale espressione prima di procedere alla somma algebrica. Otteniamo così

$$5-[2-(-\mathbf{6})\cdot\mathbf{4}:(-\mathbf{8})+6]=5-[2-(+\mathbf{3})+6] \quad \boxed{2}$$

  Eliminiamo ora la coppia di parentesi quadre preceduta dal segno −, cambiando il segno ai termini in essa contenuti. Dalla $\boxed{2}$ otteniamo quindi $5-2+(+3)-6=5-2+3-6=\mathbf{0}$.

- Possiamo procedere anche nel seguente modo: per prima cosa eliminiamo dalla $\boxed{1}$ le parentesi quadre, considerando l'espressione $(-6)\cdot 4:(-8)$ come un unico termine; otteniamo quindi

$$5-[2-\underbrace{(-6)\cdot 4:(-8)}+6]=5-2+\underbrace{(-6)\cdot 4:(-8)}_{+3}-6=5-2+3-6=\mathbf{0}$$

4 Calcoliamo il valore dell'espressione

$$[10-2^4-4\cdot(-3)]:\{-3+6\cdot(-3):2-[-14-15:(-3)]\} \quad \boxed{3}$$

- **Primo metodo**
  - Calcoliamo, all'interno della prima coppia di parentesi quadre, la potenza $2^4=16$ e il prodotto $-4\cdot(-3)=12$, e poi la somma algebrica $10-16+12=6$:

$$[10-2^4-4\cdot(-3)]=10-16+12=\mathbf{6}$$

  - Entro le parentesi graffe calcoliamo $+6\cdot(-3):2=-18:2=-9$ ed eliminiamo la coppia di parentesi quadre, preceduta dal segno −, cambiando il segno ai termini in essa contenuti:

$$\{-3+6\cdot(-3):2-[-14-15:(-3)]\}=-3-9+14+15:(-3)$$

Eseguiamo la divisione $+15 : (-3) = -5$; poi calcoliamo la somma algebrica:

$$-3 - 9 + 14 + 15 : (-3) = -3 - 9 + 14 - 5 = -3$$

- Ora ci resta solo da eseguire la divisione indicata nella $\boxed{3}$:

$$\underbrace{[10 - 2^4 - 4 \cdot (-3)]}_{6} : \underbrace{\{-3 + 6 \cdot (-3) : 2 - [-14 - 15 : (-3)]\}}_{-3} = -2$$

$$6 : (-3) = -2$$

Secondo metodo

Possiamo procedere anche operando successivamente sull'intera espressione $\boxed{3}$:

$$[10 - \underbrace{2^4}_{16} \underbrace{- 4 \cdot (-3)}_{+12}] : \{-3 \underbrace{+ 6 \cdot (-3) : 2}_{+(-9)} - [-14 \underbrace{- 15 : (-3)}_{+5}]\} =$$

$$= \underbrace{[10 - 16 + 12]}_{+6} : \{-3 \underbrace{+ (-9)}_{-9} \underbrace{- [-14 + 5]}_{-(-9)}\} =$$

$$= +6 : \{-3 - 9 \underbrace{- (-9)}_{+9}\} =$$

$$= +6 : \{-3 - 9 + 9\} =$$

$$= +6 : \{-3 - \cancel{9} + \cancel{9}\} = +6 : (-3) = -2$$