UNITÀ 1

Numeri naturali

- L'insieme dei numeri naturali
- Le quattro operazioni aritmetiche
- Le potenze
- Espressioni
- Divisibilità
- Numeri primi
- Massimo comune divisore e minimo comune multiplo

L'insieme dei numeri naturali

1 Introduzione

In questa unità studieremo i **numeri naturali**, che già conosci dalla scuola secondaria di primo grado. Oltre alle proprietà dei numeri naturali, ripasseremo le varie operazioni con essi: inizieremo così lo studio dell'**aritmetica**. Nel seguito studieremo l'**algebra**, cioè il calcolo letterale, che altro non è se non una generalizzazione del calcolo aritmetico.

Il termine «aritmetica» deriva dal greco *arithmētiké*, da *arithmós* che significa «numero». Il termine «algebra» deriva dal titolo del trattato sulle equazioni *al-Kitāb* ***al-ǧabr*** *wa l-muqābala* (*Compendio sul Calcolo per Completamento e Bilanciamento*) scritto in arabo dal matematico persiano al-Khuwarizmi (IX secolo d.C.).
I due termini vengono usati in modi diversi. Alcuni intendono con *aritmetica* la parte della matematica che studia i numeri naturali e i numeri razionali assoluti, cioè privi di segno, e con *algebra* la parte della matematica che studia i numeri con segno, cioè i numeri interi e razionali relativi. Altri, invece, indicano con *aritmetica* lo studio dei numeri e con *algebra* la sua generalizzazione consistente nel calcolo letterale.

2 I numeri naturali e il loro ordinamento

I numeri naturali sono

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

e formano un insieme che viene detto **insieme dei numeri naturali** e che si indica con il simbolo $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,\ldots\,;\,n\,;\,n+1\,;\,\ldots\}$$

I numeri naturali nascono dall'attività del contare, che è la prima attività matematica che si riscontra nella storia dell'umanità: proprio per questo motivo sono detti *naturali*.

PREREQUISITI

In questa unità ripasseremo e approfondiremo le nozioni relative ai numeri naturali.
Non sono perciò richiesti particolari prerequisiti.
In questa unità, e nelle prossime, useremo il termine «insieme» nel suo significato intuitivo.
Gli insiemi verranno studiati nelle prossime unità relative ai *linguaggi della matematica*.

OBIETTIVI

Conoscenze

- Proprietà dell'insieme dei numeri naturali
- Definizioni e proprietà delle operazioni aritmetiche e delle potenze
- Concetto di divisibilità tra numeri naturali
- Numeri primi
- Massimo comune divisore e minimo comune multiplo di due o più numeri naturali diversi da zero

Abilità

- Eseguire i calcoli con i numeri naturali sfruttando le proprietà delle operazioni aritmetiche e delle potenze
- Calcolare il valore di un'espressione con i numeri naturali
- Determinare i divisori di un numero applicando i criteri di divisibilità
- Scomporre un numero naturale in fattori primi
- Calcolare il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo di due o più numeri naturali diversi da zero

Contare significa passare da un numero al suo successivo (**FIGURA 1**).
Si costruisce così la *successione dei numeri naturali*.

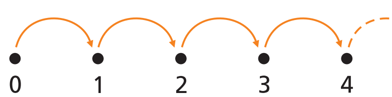

FIGURA 1

L'aggettivo **naturale** deriva dal latino *naturalis* (conforme alle leggi della natura, innato) che, a sua volta, deriva da *natura*. Questo aggettivo è attribuito all'insieme dei numeri interi che vanno dallo 0 fino all'infinito, perché questi numeri sono stati costruiti spontaneamente già dall'uomo primitivo per l'esigenza di contare.

Nel seguito incontreremo anche l'*insieme dei numeri naturali privato dello zero*; indicheremo tale insieme con $\mathbb{N}^*$ (si legge «enne con asterisco»):

$$\mathbb{N}^* = \{1\,;2\,;3\,;4\,;\ldots\}$$

- Elenchiamo ora le **proprietà dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali**.
  - L'insieme dei numeri naturali è infinito.
  - Ogni numero naturale ha un successivo.
  - Ogni numero naturale, eccettuato lo zero, ha un precedente.
  - Lo zero è l'elemento minimo dell'insieme dei numeri naturali.
  - L'insieme dei numeri naturali non ha un elemento massimo.
- Per indicare che due numeri a e b sono **uguali**, useremo il simbolo $=$ e scriveremo $a = b$ leggendo «a è uguale a b».
  La relazione di uguaglianza tra numeri naturali gode delle proprietà
  - **riflessiva**: ogni numero è uguale a se stesso ($a = a$);
  - **simmetrica**: **se** $a = b$ **allora** $b = a$;
  - **transitiva**: **se** $a = b$ e $b = c$, **allora** $a = c$.

- Per indicare che due numeri a e b **non** *sono uguali*, useremo il simbolo $\neq$ e scriveremo $a \neq b$ leggendo «a è diverso da b».

Attenzione! Nel seguito le lettere come a, b, c, p, q, r, n, ... rappresenteranno dei generici numeri naturali.

- I numeri naturali hanno un **ordine**, cioè, dati due numeri naturali, diversi tra loro, è sempre possibile confrontarli e stabilire se il primo è **minore** o **maggiore** del secondo; in altre parole, è possibile stabilire tra essi una **relazione di disuguaglianza**.

DEFINIZIONE DISUGUAGLIANZA

Se nella successione dei numeri naturali un numero a precede un numero b, si dice che a è *minore* di b e si scrive $a < b$; se invece a segue b, si dice che a è *maggiore* di b e si scrive $a > b$.

ESEMPI

1 $17 = 17$ e $6 \neq 8$

2 Per la proprietà simmetrica dell'uguaglianza si può scrivere indifferentemente $5 = 2 + 3$ oppure $2 + 3 = 5$.

3 $3 < 5$ e $5 > 3$ $\qquad$ $0 < 4$ e $7 > 0$ $\qquad$ $20 > 12$ e $12 < 20$

- Per indicare le relazioni d'ordine si usano anche altri due simboli: $\leq$, $\geq$.
Il simbolo $\leq$ significa «minore o uguale», mentre il simbolo $\geq$ significa «maggiore o uguale»:

$$a \leq b \iff a < b \text{ oppure } a = b$$
$$a \geq b \iff a > b \text{ oppure } a = b$$

Il simbolo $\iff$ si legge «equivale a» oppure «se e solo se».

ESEMPIO

4 La scrittura $a \leq 5$ significa che il numero a può essere minore di 5 o anche il numero 5 stesso. La scrittura $x \geq 7$ indica che il numero x può essere uguale a 7 oppure maggiore di 7. In matematica si può anche scrivere $3 \leq 5$ perché delle due relazioni $3 < 5$ e $3 = 5$ se ne verifica almeno una, la prima. Si può anche scrivere $7 \geq 7$ perché delle due relazioni $7 > 7$ e $7 = 7$ si verifica la seconda.

IN SINTESI...

I più importanti simboli che esprimono relazioni tra numeri sono

$=$ $\quad$ $\neq$
$<$ $\quad$ $>$
$\leq$ $\quad$ $\geq$

- Osserviamo ora la FIGURA 2. È evidente che se $2 < 4$ e $4 < 7$, allora è anche $2 < 7$. In generale

$$\textbf{se } a < b \textbf{ e } b < c, \textbf{ allora } a < c$$

Analogamente

$$\textbf{se } p > q \textbf{ e } q > r, \textbf{ allora } p > r$$

Le due relazioni precedenti esprimono la **proprietà transitiva della disuguaglianza**.

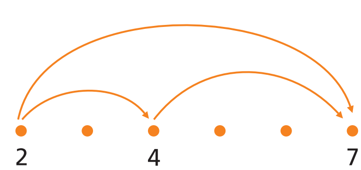

FIGURA 2

Le quattro operazioni aritmetiche

3 Addizione

L'**addizione**, che si indica con il simbolo $+$, è un'operazione che si esegue tra due numeri, detti **addendi**. Il risultato dell'addizione si chiama **somma** (FIGURA 3).

DEFINIZIONE SOMMA

La somma di due numeri naturali è il numero naturale che si ottiene contando di seguito al primo tutte le unità del secondo (FIGURA 4).

FIGURA 3

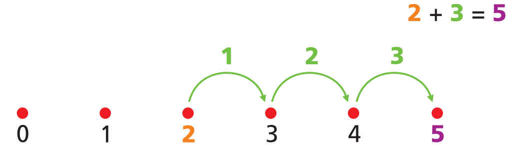

FIGURA 4

4 Proprietà dell'addizione

L'addizione gode di alcune importanti proprietà.

- La **proprietà commutativa** permette di cambiare l'ordine degli addendi; in simboli

$$a + b = b + a$$

- La **proprietà associativa** permette di calcolare la somma di tre o più addendi. L'addizione infatti è stata definita nel paragrafo precedente come operazione tra *due* numeri.
  A tutti è però capitato di calcolare, ad esempio, $2 + 3 + 7$. Si può procedere in due modi diversi, ottenendo lo stesso risultato (FIGURA 5). Usando le parentesi scriveremo:

$$2 + 3 + 7 = (2 + 3) + 7 = 5 + 7 = 12$$

oppure

$$2 + 3 + 7 = 2 + (3 + 7) = 2 + 10 = 12$$

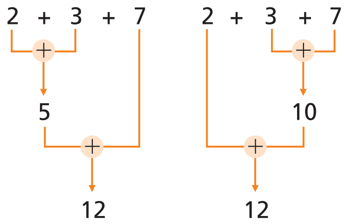

FIGURA 5

Il fatto di ottenere lo stesso risultato non è casuale. Se invece di 2, 3 e 7 si utilizzano altri numeri, le due somme sono comunque uguali. Ciò accade per la proprietà associativa, che si può esprimere così:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Potremo pertanto scrivere $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$

- L'**elemento neutro** dell'addizione è lo zero. Ciò significa che, addizionando zero a qualsiasi numero, si ottiene il numero dato; in simboli

$$a + 0 = 0 + a = a$$

In molti casi le proprietà commutativa e associativa ci permettono di eseguire rapidamente le addizioni.

ESEMPI

1. $97 + 21 + 3 = 97 + 3 + 21 = (97 + 3) + 21 = 100 + 21 = 121$
2. $123 + 37 = (120 + 3) + (30 + 7) = 120 + 3 + 30 + 7 = 120 + 30 + 3 + 7 =$
   $= (120 + 30) + (3 + 7) = 150 + 10 = 160$

5 Sottrazione

La **sottrazione**, che si indica con il simbolo $-$, è un'operazione che si esegue tra due numeri, considerati nell'ordine, il primo detto **minuendo** e il secondo **sottraendo**.
Il risultato della sottrazione si chiama **differenza**.

DEFINIZIONE **DIFFERENZA**

La differenza di due numeri naturali è il numero naturale, se esiste, che addizionato al sottraendo dà come somma il minuendo (FIGURA 6).

Ad esempio è $5 - 3 = 2$ perché $5 = 3 + 2$ (FIGURA 7).

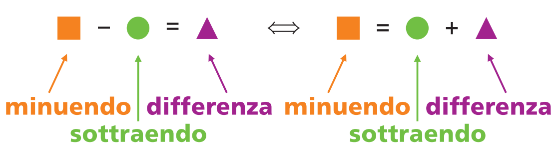

FIGURA 6

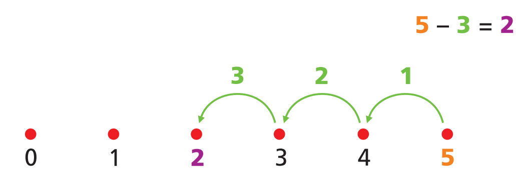

FIGURA 7

La sottrazione, nell'insieme dei numeri naturali, si può eseguire solo se il minuendo è maggiore o uguale al sottraendo. Quindi

$$\boxed{a - b = c \quad \Longleftrightarrow \quad a = b + c \quad \text{con } a \geq b}$$

- In particolare
  - sottraendo da un numero il numero stesso, si ottiene 0: $a - a = 0$
  - sottraendo 0 da un numero si ottiene il numero stesso: $a - 0 = a$

Non è invece possibile calcolare, nell'insieme $\mathbb{N}$, la differenza $5 - 7$; infatti non esiste alcun numero naturale che sommato a 7 dia 5. Per eseguire una sottrazione in cui il minuendo è minore del sottraendo occorrerà introdurre i *numeri interi relativi*.

6 Proprietà della sottrazione

- La sottrazione gode della **proprietà invariantiva**: se si somma o si sottrae uno stesso numero al minuendo e al sottraendo, la differenza non cambia; in simboli

$$a - b = (a + c) - (b + c) \qquad a - b = (a - c) - (b - c)$$

Ovviamente devono essere possibili tutte le differenze indicate.

- È importante ricordare che la sottrazione **non** gode della *proprietà commutativa*: per esempio $7 - 5$ si può eseguire e il risultato è 2, mentre $5 - 7$ non si può eseguire in $\mathbb{N}$.
- La sottrazione **non** gode neppure della *proprietà associativa*. Ad esempio per calcolare

$$12 - 7 - 3$$

è necessario eseguire le sottrazioni *nell'ordine indicato*: prima $12 - 7 = 5$ e, successivamente, $5 - 3 = 2$. Se si eseguisse prima la seconda sottrazione, $7 - 3 = 4$, e poi la prima, $12 - 4 = 8$, si otterrebbe un risultato diverso ed errato. Analogamente:

$$20 - 4 - 9 - 3 = (20 - 4) - 9 - 3 = 16 - 9 - 3 = (16 - 9) - 3 = 7 - 3 = 4$$

- La sottrazione **non** ammette *elemento neutro*. Lo zero *non* è l'elemento neutro della sottrazione: infatti se è vero che $5 - 0 = 5$, la sottrazione $0 - 5$ in $\mathbb{N}$ non si può neppure eseguire.

Possiamo utilizzare la proprietà invariantiva per eseguire rapidamente alcune sottrazioni.

ESEMPI

1 $122 - 27 = (122 - \mathbf{22}) - (27 - \mathbf{22}) = 100 - 5 = 95$

2 $198 - 48 = (198 + \mathbf{2}) - (48 + \mathbf{2}) = 200 - 50 = 150$

7 Moltiplicazione

La **moltiplicazione**, che si indica con il simbolo × o più frequentemente con un semplice puntino ·, si esegue tra due numeri, detti **fattori**. Il risultato della moltiplicazione si chiama **prodotto** (FIGURA 8).

DEFINIZIONE PRODOTTO

Il prodotto di due numeri naturali a e b è la somma di tanti addendi uguali al primo fattore quante sono le unità indicate dal secondo fattore (FIGURA 9):

$$\boxed{a \cdot b = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{b \text{ addendi}}}$$

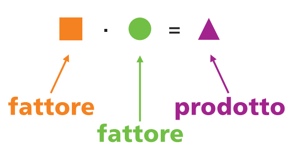

FIGURA 8

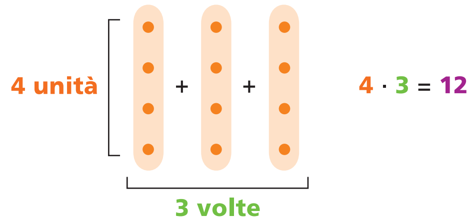

FIGURA 9

8 Proprietà della moltiplicazione

La moltiplicazione gode di alcuni importanti proprietà, analoghe a quelle dell'addizione.

- **Proprietà commutativa**: permette di cambiare l'ordine dei fattori; in simboli:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

- **Proprietà associativa**: permette di calcolare il prodotto di tre o più fattori. Anche la moltiplicazione è stata definita come operazione tra *due* numeri.
Possiamo però calcolare, ad esempio, $2 \cdot 3 \cdot 7$. Questo prodotto si può calcolare in due modi diversi, ottenendo comunque lo stesso risultato (FIGURA 10).

Usando le parentesi scriveremo

$$2 \cdot 3 \cdot 7 = (2 \cdot 3) \cdot 7 = 6 \cdot 7 = 42$$

oppure

$$2 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot (3 \cdot 7) = 2 \cdot 21 = 42$$

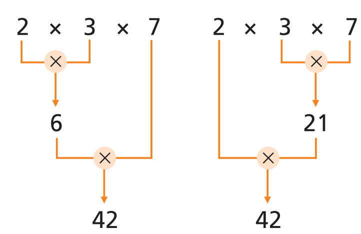

FIGURA 10

Ovviamente, se invece di 2, 3 e 7 si utilizzano altri numeri, i prodotti, calcolati nei due modi, sono comunque uguali. Ciò accade per la proprietà associativa, che si può esprimere così:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Potremo pertanto scrivere $\quad a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

- **Proprietà distributiva** della moltiplicazione *rispetto all'addizione*. Per moltiplicare un numero per una somma, si può moltiplicare quel numero per ciascun addendo e sommare i prodotti ottenuti:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Ad esempio, $4 \cdot (3 + 2) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 2$. Questa uguaglianza, letta da destra a sinistra, è giustificata in FIGURA 11.

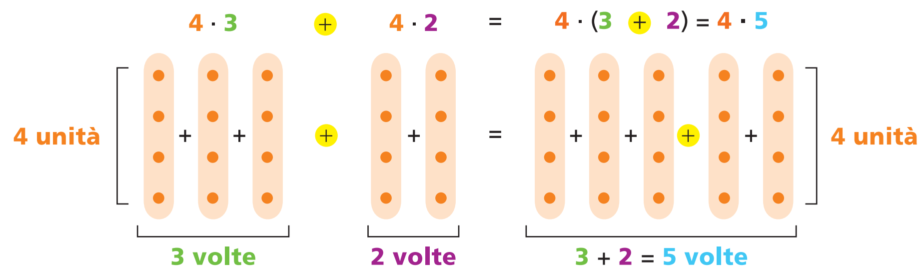

FIGURA 11

La proprietà si può estendere alla somma di più di due addendi; ad esempio

$$a \cdot (b + c + x + y) = a \cdot b + a \cdot c + a \cdot x + a \cdot y$$

- **Proprietà distributiva** della moltiplicazione *rispetto alla sottrazione*. Per moltiplicare un numero per una differenza, si può moltiplicare quel numero per il minuendo e per il sottraendo e, successivamente, eseguire la sottrazione tra i prodotti ottenuti:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

- **Elemento neutro**. L'elemento neutro della moltiplicazione è il numero 1. Ciò significa che moltiplicando qualsiasi numero per 1 si ottiene il numero dato:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

- **Elemento annullatore**. Lo zero è l'elemento annullatore della moltiplicazione, ossia moltiplicando qualsiasi numero per 0 si ottiene 0:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

- **Legge di annullamento del prodotto**. Se il prodotto di due numeri è 0, allora almeno uno dei fattori è 0:

se $\quad a \cdot b = 0 \qquad$ **allora** $\quad a = 0$ oppure $b = 0$ o anche $a = b = 0$

Le proprietà della moltiplicazione ci aiutano a eseguire rapidamente alcuni calcoli.

ESEMPI

1 Per calcolare rapidamente $5 \cdot 36 \cdot 2$ applichiamo le proprietà commutativa e associativa:

$$5 \cdot 36 \cdot 2 = 36 \cdot 5 \cdot 2 = 36 \cdot (5 \cdot 2) = 36 \cdot 10 = 360$$

2 Calcoliamo $25 \cdot 16$ applicando le proprietà associativa e commutativa:

$$25 \cdot 16 = (5 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 4) = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = (5 \cdot 4) \cdot (5 \cdot 4) = 20 \cdot 20 = 400$$

Se il prodotto $20 \cdot 20$ non ti risulta immediato, osserva che

$$20 \cdot 20 = (2 \cdot 10) \cdot (2 \cdot 10) = (2 \cdot 2) \cdot (10 \cdot 10) = 4 \cdot 100 = 400$$

3 Mediante la proprietà distributiva possiamo eseguire rapidamente le seguenti operazioni:

$$3 \cdot 125 = 3 \cdot (100 + 25) = 3 \cdot 100 + 3 \cdot 25 = 300 + 75 = 375$$
$$4 \cdot 98 = 4 \cdot (100 - 2) = 4 \cdot 100 - 4 \cdot 2 = 400 - 8 = 392$$

9 Divisione

La **divisione**, che si indica con il simbolo :, è un'operazione che si esegue tra due numeri, considerati nell'ordine, il primo detto **dividendo** e il secondo **divisore**. Il risultato della divisione si chiama **quoto** o **quoziente esatto**.

DEFINIZIONE QUOTO

Dati due numeri naturali a e b, con $b \neq 0$, si dice quoto o *quoziente esatto* tra a e b il numero naturale c, se esiste, che moltiplicato per il divisore b dà per prodotto il dividendo a (FIGURA 12):

$$\boxed{a : b = c \text{ con } b \neq 0 \iff a = b \cdot c}$$

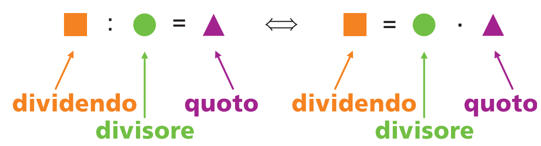

FIGURA 12

- Casi particolari:
  - $a : 1 = a$
  - $a : a = 1 \quad \text{se } a \neq 0$
  - $0 : a = 0 \quad \text{se } a \neq 0$

Se esiste il quoto tra due numeri naturali a e b, si dice che a è **divisibile** per b o anche che a è **multiplo** di b. Se ciò non accade si può ricorrere alla *divisione approssimata*, che vedremo nel PARAGRAFO 11. La divisione, come è stata ora definita, viene anche detta *divisione esatta* per distinguerla dalla divisione approssimata.

ESEMPI

1. La divisione $19 : 5$ non si può eseguire nell'insieme dei numeri naturali, perché non esiste alcun numero naturale che, moltiplicato per 5, dia 19.
2. $24 : 6 = 4$, perché $24 = 6 \cdot 4$ (24 è divisibile per 6 e 24 è multiplo di 6).

IMPORTANTISSIMO

Non è possibile dividere un numero per 0

- Ad esempio, non si può eseguire la divisione $7 : 0$. Il quoto di tale divisione dovrebbe essere un numero q tale che $q \cdot 0 = 7$. Ma, moltiplicando qualunque numero per zero, si ottiene come prodotto zero. Perciò *non esiste il quoto* richiesto. Ciò è vero anche se, al posto di 7, si prende come dividendo qualunque numero diverso da zero.
- Se invece si vuole eseguire la divisione $0 : 0$, *il quoto non è determinato in modo unico* perché si trovano infiniti numeri q che, moltiplicati per il divisore 0, danno come prodotto il dividendo 0. Perciò, nel caso in cui il dividendo sia 0, non è possibile determinare univocamente il quoto se anche il divisore è zero.

Concludiamo così che *non è mai possibile dividere un numero per zero*.
Sono pertanto *scritture prive di significato*, ad esempio

$$1 : 0 \qquad 5 : 0 \qquad 0 : 0$$

10 Proprietà della divisione

La divisione gode delle seguenti proprietà, che si possono applicare solo se è possibile eseguire le divisioni indicate.

- **Proprietà invariantiva**. Se si moltiplicano o si dividono il dividendo e il divisore per uno stesso numero *diverso da zero*, il quoto non cambia:

$$a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c)$$
$$a : b = (a : c) : (b : c)$$

- **Proprietà distributiva** della divisione *rispetto all'addizione*. Per dividere una somma di due o più termini per un numero, si può dividere ciascun addendo per quel numero e successivamente sommare i quoti:

$$(a + b) : d = a : d + b : d$$

- **Proprietà distributiva** della divisione *rispetto alla sottrazione*. Per dividere una differenza per un numero, è possibile dividere sia il minuendo sia il sottraendo per quel numero e successivamente eseguire la sottrazione tra i quoti:

$$(a - b) : c = a : c - b : c$$

ATTENZIONE!

Le due proprietà distributive consentono di dividere una somma o una differenza per un numero: il simbolo di *divisione* compare **a destra** di quello di *addizione* o di *sottrazione*.
Occorre però osservare che non esistono proprietà distributive per dividere un numero per una somma o per una differenza:

$a : (b + c)$ **non è uguale ad** $a : b + a : c$

Ad esempio

$$12 : (4 + 2) = 12 : 6 = 2$$

mentre

$$12 : 4 + 12 : 2 = 3 + 6 = 9$$

- È importante ricordare che la divisione **non** gode della *proprietà commutativa*: ad esempio $15 : 5$ si può eseguire e il risultato è 3, mentre $5 : 15$ non si può eseguire in $\mathbb{N}$.

- La divisione **non** gode neppure della *proprietà associativa*. Se si scrive, ad esempio,

$$48 : 12 : 2$$

è necessario eseguire le divisioni *nell'ordine indicato*: prima $48 : 12 = 4$, e poi $4 : 2 = 2$. Se si eseguisse prima la seconda divisione, $12 : 2 = 6$, e poi la prima, $48 : 6 = 8$, si otterrebbe un risultato diverso ed errato.
Analogamente si ha

$$800 : 8 : 4 : 5 = (800 : 8) : 4 : 5 = 100 : 4 : 5 = (100 : 4) : 5 = 25 : 5 = 5$$

- **Non** esiste l'*elemento neutro* della divisione. Non devi credere che 1 sia l'elemento neutro della divisione: infatti, se è vero che $7 : 1 = 7$, non esiste invece, in $\mathbb{N}$, il quoto tra 1 e 7.

ESEMPI

1 Utilizziamo la proprietà invariantiva per calcolare $144 : 24$.

$$144 : 24 = (144 : 2) : (24 : 2) = 72 : 12 = (72 : 2) : (12 : 2) = 36 : 6 = 6$$

2 È noto che per dividere un numero per 5 si può moltiplicare il numero per 2 e successivamente dividere il prodotto ottenuto per 10. Questo metodo è giustificato dalla proprietà invariantiva della divisione. Ad esempio

$$65 : 5 = (65 \cdot 2) : (5 \cdot 2) = 130 : 10 = 13$$

3 Calcoliamo rapidamente $612 : 6$, applicando la proprietà distributiva:

$$612 : 6 = (600 + 12) : 6 = 600 : 6 + 12 : 6 = 100 + 2 = 102$$

11 Divisione approssimata (divisione con resto)

Se il dividendo non è multiplo del divisore, come abbiamo già detto, la divisione esatta non si può eseguire. Si può ricorrere allora alla **divisione approssimata**.

La divisione approssimata associa al dividendo e al divisore due numeri naturali, detti rispettivamente *quoziente* e *resto*.

- Il **quoziente** della divisione approssimata, detto anche *quoziente approssimato*, è il più grande numero intero che, moltiplicato per il divisore, dà un prodotto minore o uguale al dividendo.
- Il **resto** è la differenza tra il dividendo e tale prodotto. Il resto risulta sempre minore del divisore.

In simboli

$$\boxed{a : b = q \text{ con resto } r \quad \Longleftrightarrow \quad r = a - b \cdot q \text{ con } r < b}$$

o anche

$$\boxed{a : b = q \text{ con resto } r \quad \Longleftrightarrow \quad a = b \cdot q + r \text{ con } r < b}$$

Attenzione! Se il resto è uguale a zero, allora l'uguaglianza $a = b \cdot q + r$ diviene

$$a = b \cdot q$$

La divisione risulta esatta e q è il quoto.

Proprietà invariantiva della divisione approssimata: se si moltiplicano o si dividono il dividendo e il divisore per uno stesso numero *diverso da zero*, il quoziente non cambia, mentre il resto risulta moltiplicato o diviso per il numero dato:

$$a : b = q \text{ con resto } r \quad \Longleftrightarrow \quad (a \cdot c) : (b \cdot c) = q \text{ con resto } r \cdot c$$
$$a : b = q \text{ con resto } r \quad \Longleftrightarrow \quad (a : c) : (b : c) = q \text{ con resto } r : c$$

ESEMPIO

Calcoliamo $19 : 5$.

Poiché non esiste alcun numero che moltiplicato per 5 dia 19, la divisione esatta non si può eseguire. Per calcolare il quoziente della divisione approssimata, osserviamo che

$$5 \cdot 0 = 0 < 19, \quad 5 \cdot 1 = 5 < 19, \quad 5 \cdot 2 = 10 < 19$$
$$5 \cdot 3 = 15 < 19, \quad 5 \cdot 4 = 20 > 19$$

Dunque 3 è il più grande numero intero che, moltiplicato per il divisore 5, dà un prodotto minore o uguale al dividendo 19. Il quoziente è quindi 3; il resto è allora $19 - 5 \cdot 3 = 4$.

Dunque concludiamo che

$$19 : 5 = 3 \text{ con resto } 4 \text{ (FIGURA 13)}$$

Infatti è $19 = 5 \cdot 3 + 4$ e risulta

$$4 < 5$$

Osserva che si ha anche $19 = 5 \cdot 2 + 9$. Sarebbe però errato dire che $19 : 5$ fa 2 con il resto di 9, perché il resto deve essere minore del divisore, mentre è $9 > 5$.

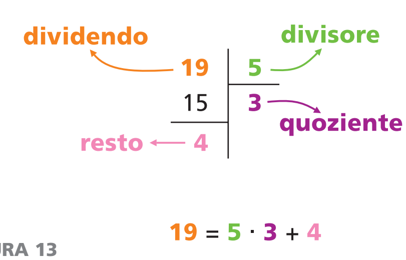

FIGURA 13

OSSERVAZIONI SUL CONCETTO DI OPERAZIONE

Ciascuna delle operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali consiste nell'associare a due numeri naturali a e b, *termini* dell'operazione, considerati nell'ordine, un terzo numero naturale c, *risultato* dell'operazione.
Nel caso dell'addizione e della moltiplicazione, comunque scegliamo i termini dell'operazione, il risultato c esiste ed è unico. Diremo perciò che *l'addizione e la moltiplicazione sono ovunque definite in* $\mathbb{N}$.
Invece, nel caso della sottrazione e della divisione, può accadere che, considerati i termini a e b, non sia possibile determinare il risultato nell'insieme $\mathbb{N}$.
Ad esempio, se scegliamo $a = 7$ e $b = 5$, il risultato dell'operazione di sottrazione è $c = a - b = 7 - 5 = 2$. Se invece scegliamo $a = 4$ e $b = 5$, l'operazione $4 - 5$ non è possibile in $\mathbb{N}$, perché non esiste alcun numero naturale che sommato a 5 dia 4. Esempi analoghi si possono fare per l'operazione di divisione. Concludiamo quindi che *la sottrazione e la divisione sono operazioni non ovunque definite in* $\mathbb{N}$.
Facciamo infine le seguenti considerazioni.

- Il concetto di operazione non riguarda solo l'aritmetica o l'algebra, ma ogni campo della matematica. Ad esempio, nel seguito, avrai modo di incontrare l'*operazione di unione tra insiemi* oppure l'*operazione di congiunzione logica tra enunciati*.
- Il **risultato** di un'operazione, se esiste, deve essere **unico**. Per questo motivo la *divisione approssimata* tra numeri naturali è una «operazione» in senso improprio. Si tratta, in realtà, di una doppia operazione: una permette di associare a due numeri naturali il quoziente approssimato della divisione e l'altra di determinare il resto.
  In programmi di matematica come **Derive** tali operazioni sono indicate in modo diverso: la funzione FLOOR(m ; n) determina il quoziente approssimato tra due numeri naturali, mentre la funzione MOD(m ; n) determina il resto della divisione tra m ed n.

Le potenze

12 Definizione di potenza

L'**elevamento a potenza** è un'operazione che si esegue tra due numeri, il primo detto **base** e il secondo **esponente**.

DEFINIZIONE POTENZA

La potenza di base a ed esponente n si indica con a^n ed è uguale al prodotto di n fattori uguali ad a:

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fattori}}}$$

- Si conviene che
  - la potenza con esponente 1 di qualsiasi numero naturale è il numero stesso; in simboli
  $$a^1 = a$$
  - la potenza con esponente 0 di qualsiasi numero naturale diverso da 0 è 1; in simboli
  $$a^0 = 1 \quad \text{per } a \neq 0$$
  - la potenza con base 0 ed esponente 0 invece non ha senso:
  $$0^0 \quad \text{non ha significato}$$

ESEMPI

1 $3^4 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{4 fattori}} = 81$ $\quad 3^4$ si legge *tre elevato alla quarta potenza*, o semplicemente *tre alla quarta*; 3 è la base, 4 è l'esponente.

2 Una potenza di base 1, qualunque sia l'esponente, è sempre uguale a 1:

$1^2 = \underbrace{1 \cdot 1}_{\text{2 fattori}} = 1 \qquad 1^3 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1}_{\text{3 fattori}} = 1 \qquad 1^4 = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}_{\text{4 fattori}} = 1 \qquad 1^n = 1$

3 Una potenza di base 0, qualunque sia l'esponente, purché diverso da 0, è sempre uguale a 0:

$0^2 = \underbrace{0 \cdot 0}_{\text{2 fattori}} = 0 \qquad 0^3 = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0}_{\text{3 fattori}} = 0 \qquad 0^4 = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}_{\text{4 fattori}} = 0 \qquad 0^n = 0 \quad (n \neq 0)$

4 $5^1 = 5 \qquad 24^1 = 24 \qquad 5^0 = 1 \qquad 24^0 = 1$

13 Proprietà delle potenze

Le potenze godono delle seguenti proprietà.

- **Per moltiplicare potenze con la stessa base** si sommano gli esponenti, lasciando invariata la base:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

ESEMPI

1 $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^5 = 2^{3+2+5} = 2^{10}$

- **Per dividere potenze con la stessa base** si sottraggono gli esponenti, lasciando invariata la base:

$$\boxed{a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0,\ m \geq n)}$$

2 $3^8 : 3^3 = 3^{8-3} = 3^5$

- **Per calcolare la potenza di una potenza** si moltiplicano gli esponenti, lasciando invariata la base:

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

3 $(5^4)^6 = 5^{4 \cdot 6} = 5^{24}$

- **Per moltiplicare potenze con lo stesso esponente** si moltiplicano le basi, lasciando invariato l'esponente:

$$\boxed{a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m}$$

4 $3^5 \cdot 7^5 \cdot 2^5 = (3 \cdot 7 \cdot 2)^5 = 42^5$

- **Per dividere potenze con lo stesso esponente** si dividono le basi, lasciando invariato l'esponente:

$$\boxed{a^m : b^m = (a : b)^m \quad (b \neq 0)}$$

5 $24^5 : 6^5 = (24 : 6)^5 = 4^5$

ATTENZIONE!

La somma di due potenze con lo stesso esponente non può essere trasformata nella potenza della somma delle basi, ossia

$a^n + b^n$ **è diverso da** $(a+b)^n$

Ad esempio

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \qquad (3+4)^2 = 7^2 = 49$$

e quindi $3^2 + 4^2$ è diverso da $(3+4)^2$.

14 Notazione esponenziale e ordine di grandezza

Dalla definizione di potenza di un numero risulta evidente come l'utilizzo della simbologia relativa alle potenze permetta di scrivere, con pochi simboli, numeri molto grandi (e, come vedremo nell'UNITÀ 3, anche numeri molto piccoli); in particolare risulta di grande praticità l'uso delle potenze di 10.
Sappiamo che

$$10^0 = 1 \qquad 10^1 = 10 \qquad 10^2 = 100 \qquad 10^3 = 1000 \qquad 10^4 = 10.000 \qquad \dots$$

Possiamo così osservare che l'*esponente di una potenza di 10 è uguale al numero degli zeri che seguono l'unità*.

- Quando un numero è scritto usando le potenze di 10, si dice che il numero è espresso in **notazione**, o **forma**, **esponenziale**.
  Ad esempio, il numero 1.230.000, scritto come $123 \cdot 10^4$, è espresso in forma esponenziale. Sono scritti in notazione esponenziale anche i numeri

$$3 \cdot 10^5 \qquad 843 \cdot 10^7 \qquad 1075 \cdot 10^{22} \qquad \dots$$

- In molte questioni in cui si opera con numeri molto grandi, non interessa conoscere il numero con precisione assoluta, ma è sufficiente valutarne l'**ordine di grandezza**, cioè la potenza di 10 che meno differisce da quel numero.
  Ad esempio, si può dire che l'altezza del monte Everest (8848 m) è dell'ordine di 10^4 metri, perché $10^4 = 10.000$ è la potenza di 10 più vicina a 8848.
  Analogamente potremo dire che l'ordine di grandezza, in metri,
  - dell'altezza del Monte Annapurna I in Nepal (8078 m) è 10^4
  - della lunghezza del fiume Nilo (6671 km) è 10^7
  - della distanza media Terra-Luna (384.400 km) è 10^8
  - della distanza media Terra-Sole (149.597.850 km) è 10^{11}

- Anche il nostro usuale sistema di numerazione è un'applicazione delle potenze di 10. Ad esempio, in esso il numero 5372 è composto da 5 migliaia, più 3 centinaia, più 7 decine, più 2 unità:

$$5372 = 5 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 2 \cdot 1 = 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

  Quest'ultima scrittura è detta **forma polinomiale di un numero** (vedi UNITÀ 5).

Espressioni

15 Priorità delle operazioni

Se in un'espressione sono indicate diverse operazioni, queste devono essere eseguite rispettando il loro **grado di priorità**.
In un'espressione si devono eseguire

prima → gli elevamenti a potenza

poi → le moltiplicazioni e le divisioni

infine → le addizioni e le sottrazioni

ESEMPIO

Calcoliamo $5 + 7 \cdot 3$.

Dobbiamo eseguire prima la moltiplicazione $7 \cdot 3 = 21$ e poi l'addizione $5 + 21 = 26$:

$$5 + 7 \cdot 3 = 5 + 21 = 26$$

Sarebbe invece **errato** eseguire prima l'addizione $5 + 7 = 12$ e poi la moltiplicazione $12 \cdot 3 = 36$.

Nel caso siano indicate di seguito *diverse operazioni con lo stesso grado di priorità*, esse *vanno eseguite nell'ordine dato*. Ad esempio, per calcolare $168 : 12 \cdot 3 : 2$ eseguiamo

A innanzitutto la divisione $\quad 168 : 12 = 14$

B poi la moltiplicazione $\quad 14 \cdot 3 = 42$

C e infine la divisione $\quad 42 : 2 = 21$

Quindi $\quad 168 : 12 \cdot 3 : 2 = 21$

16 Le parentesi

Quando si vogliono eseguire operazioni in un ordine diverso da quello dato dal loro grado di priorità, si utilizzano le *parentesi*. Le parentesi, in una espressione, devono sempre comparire in coppie: a ogni parentesi aperta deve corrispondere una parentesi chiusa. Si devono eseguire per prime le operazioni indicate nelle coppie di parentesi più interne, ossia in quelle coppie, formate da una parentesi aperta e una chiusa, all'interno delle quali non vi siano altre parentesi. Tali coppie di parentesi devono quindi essere sostituite con i risultati rispettivamente ottenuti. Si prosegue in questo modo fino a quando non vi sono più parentesi.

ESEMPIO

1 Calcoliamo il valore dell'espressione

$$\{(2 + 3) \cdot [3 + (4 + 2) \cdot 7] : 9 + 15\} \cdot (6 \cdot 3 - 4^2)^2 \qquad \boxed{1}$$

Cominciamo con l'eseguire i calcoli indicati nelle coppie di parentesi più interne, ossia tra tonde:

$$2 + 3 = 5; \quad 4 + 2 = 6; \quad 6 \cdot 3 - 4^2 = 18 - 16 = 2$$

Sostituiamo tali risultati nella $\boxed{1}$:

$$\{5 \cdot [3 + 6 \cdot 7] : 9 + 15\} \cdot 2^2 \qquad \boxed{2}$$

Ora la coppia di parentesi più interne è quella costituita dalle parentesi quadre. Calcoliamo quindi il valore dell'espressione in essa contenuta, cioè $3 + 6 \cdot 7 = 3 + 42 = 45$. Contemporaneamente calcoliamo anche la potenza 2^2, che ha la priorità rispetto alla moltiplicazione. La $\boxed{2}$ si trasforma quindi in

$$\{5 \cdot 45 : 9 + 15\} \cdot 4 \qquad \boxed{3}$$

Calcoliamo ora il valore dell'espressione contenuta entro parentesi graffe. Eseguiamo, nell'ordine indicato, la moltiplicazione e la divisione:

$$5 \cdot 45 : 9 = 225 : 9 = 25$$

Sostituiamo tale risultato nella $\boxed{3}$:

$$\{25 + 15\} \cdot 4 = 40 \cdot 4 = 160$$

Il procedimento seguito è schematizzato in **FIGURA 14**.

$$\{\underbrace{(2 + 3)} \cdot [3 + \underbrace{(4 + 2)} \cdot 7] : 9 + 15\} \cdot \underbrace{(6 \cdot 3 - 4^2)}^2$$

$$\{5 \cdot \underbrace{[3 + 6 \cdot 7]} : 9 + 15\} \cdot \underbrace{2^2}$$

$$\underbrace{\{5 \cdot 45 : 9 + 15\}} \cdot 4$$

$$\underbrace{40 \cdot 4}$$

$$160$$

FIGURA 14

L'uso di parentesi di tipo diverso, come le tonde, le quadre e le graffe, non è strettamente necessario. In matematica è possibile anche usare un solo tipo di parentesi, solitamente le tonde; le operazioni devono essere eseguite sempre a partire dalle parentesi più interne.
Utilizzando le parentesi tonde, quadre e graffe, in una espressione non si possono avere più di tre livelli di parentesi: le parentesi tonde sono contenute entro parentesi quadre, che a loro volta sono contenute entro parentesi graffe, ma queste ultime non possono essere ulteriormente racchiuse tra altre parentesi. Se invece si utilizzano solo le parentesi tonde, si può inserire una coppia di parentesi tonde in un'altra coppia di parentesi tonde la quale, a sua volta, può essere racchiusa in un'altra coppia di parentesi tonde e così via. In questo modo si possono avere quanti livelli di parentesi si voglia.

ESEMPIO

2 Consideriamo nuovamente l'espressione dell'esempio **1**. Essa si può scrivere utilizzando solo le parentesi tonde in questo modo:

$$((2+3)\cdot(3+(4+2)\cdot 7):9+15)\cdot(6\cdot 3-4^2)^2$$

Le parentesi, come vedi dallo schema, sono sempre in coppia: a ogni parentesi aperta corrisponde una parentesi chiusa. Ogni coppia di parentesi può essere considerata come una «scatola» che contiene un'espressione e può a sua volta contenere o essere contenuta in una o più «scatole». La **FIGURA 15** mostra come si deve interpretare la precedente espressione.

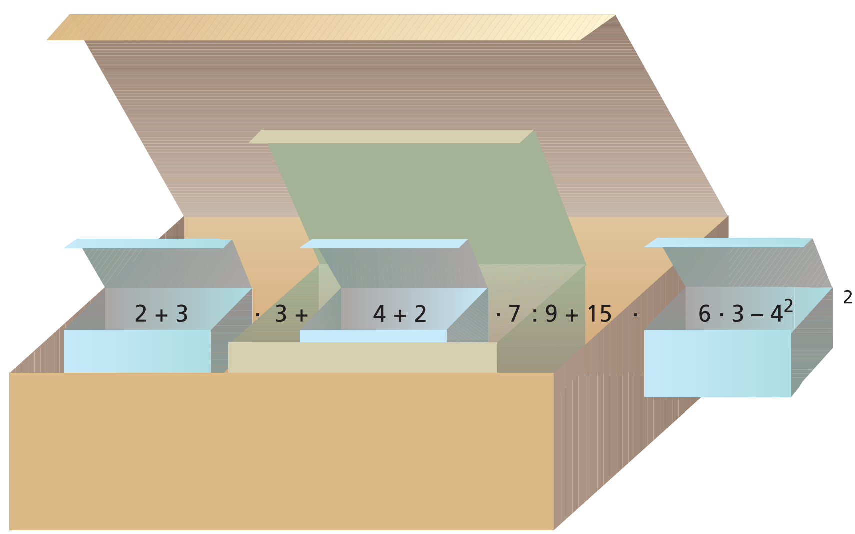

FIGURA 15

17 Altre proprietà delle operazioni

Oltre alle proprietà studiate nei precedenti paragrafi, ve ne sono altre che possono risultare utili per semplificare il calcolo delle espressioni.

- **Per dividere un prodotto per un numero**, si può dividere uno solo dei fattori per quel numero:

$$(a\cdot b\cdot c):d=a\cdot(b:d)\cdot c$$

In particolare, **per dividere un prodotto per uno dei suoi fattori**, è sufficiente eliminare quel fattore:

$$(a\cdot b\cdot c):b=a\cdot c$$

- **Per dividere un numero per un prodotto**, si può dividere successivamente quel numero per ciascun fattore:

$$a : (b \cdot c) = (a : b) : c$$

- **Per moltiplicare un numero per un quoto**, si può moltiplicare il numero per il dividendo e poi dividere il prodotto ottenuto per il divisore, oppure dividere il numero per il divisore e successivamente moltiplicare il risultato per il dividendo:

$$a \cdot (b : c) = (a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$$

- **Per dividere un numero per un quoto**, si può dividere il numero per il dividendo e poi moltiplicare il risultato ottenuto per il divisore, oppure moltiplicare il numero per il divisore e successivamente dividere il risultato per il dividendo:

$$a : (b : c) = (a : b) \cdot c = (a \cdot c) : b$$

Naturalmente queste proprietà si possono applicare solo se le divisioni da eseguire sono possibili.

ESEMPI

1. $(7 \cdot 15 \cdot 6) : 5 = 7 \cdot (15 : 5) \cdot 6 = 7 \cdot 3 \cdot 6 = 126$
2. $(7 \cdot \cancel{15} \cdot 6) : \cancel{15} = 7 \cdot 6 = 42$
3. $48 : (2 \cdot 3 \cdot 4) = [(48 : 2) : 3] : 4 = (24 : 3) : 4 = 8 : 4 = 2$
4. $6 \cdot (12 : 3) = (6 \cdot 12) : 3 = 72 : 3 = \mathbf{24}$ oppure $6 \cdot (12 : 3) = (6 : 3) \cdot 12 = 2 \cdot 12 = \mathbf{24}$
5. $24 : (12 : 3) = (24 : 12) \cdot 3 = 2 \cdot 3 = \mathbf{6}$ oppure $24 : (12 : 3) = (24 \cdot 3) : 12 = 72 : 12 = \mathbf{6}$

Divisibilità

18 Multipli e divisori

DEFINIZIONE MULTIPLO

Dati due numeri naturali a e b, si dice che a è multiplo di b se a è il prodotto di b per un numero naturale n, ossia se esiste un numero naturale n tale che

$$a = b \cdot n$$

I multipli di un numero b sono quindi tutti i numeri che si ottengono moltiplicando b per 0, 1, 2, 3, ...

ESEMPI

1. 36 è multiplo di 9, perché $36 = 9 \cdot 4$.
2. I multipli di 6 sono $6 \cdot 0 = 0$, $6 \cdot 1 = 6$, $6 \cdot 2 = 12$, $6 \cdot 3 = 18$ ecc.
   ossia 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, ...

DEFINIZIONE DIVISIBILITÀ

Dati due numeri naturali a e b, con $b \neq 0$, si dice che a è *divisibile* per b (o che b è *divisore* di a) se si può eseguire la divisione esatta $a : b$.

Come già sappiamo, ciò equivale a dire che la divisione approssimata $a : b$ dà resto 0.

ESEMPI

3 36 è divisibile per 9, perché si può eseguire la divisione esatta $36 : 9 = 4$.
Si può anche dire che 36 è divisibile per 9 perché eseguendo la divisione $36 : 9$ si ottiene 4 con resto 0.
È la stessa cosa dire «36 è divisibile per 9» e «9 è un divisore di 36».

4 36 non è invece divisibile per 7, perché la divisione approssimata $36 : 7$ dà 5 con resto 1, diverso da 0.

5 I divisori di 36 sono 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

RICORDA!

- **Lo zero è divisibile per qualsiasi numero escluso se stesso**. Infatti la divisione esatta $0 : b$ si può sempre eseguire se $b \neq 0$, e il quoto è 0.
- **Nessun numero è divisibile per zero**, perché la divisione per zero non si può eseguire.
- **Tutti i numeri sono divisibili per 1**. Infatti la divisione esatta $a : 1$ si può sempre eseguire e il quoto è a.
- **Tutti i numeri eccetto lo zero sono divisibili per se stessi**. Infatti la divisione esatta $a : a$ si può sempre eseguire se $a \neq 0$, e il quoto è 1.

- I numeri naturali divisibili per 2 si dicono **pari**. I numeri che non sono divisibili per 2 si dicono **dispari**. Lo *zero*, essendo divisibile per 2, *è considerato un numero pari*.
- Come abbiamo detto, se a è multiplo di b esiste n tale che $a = b \cdot n$. Ma ciò vuol dire che la divisione esatta $a : b$ si può eseguire (purché $b \neq 0$) e che il quoto è n. Ciò significa che b è un divisore di a.

IMPORTANTE

Dati due numeri naturali a e b, con $b \neq 0$, è la stessa cosa dire che

- a è divisibile per b
- a è multiplo di b
- b è divisore di a
- si può eseguire la divisione esatta $a : b$
- la divisione approssimata $a : b$ dà come resto 0

Dati due numeri naturali a e b, con $b \neq 0$, è la stessa cosa dire che

- a **non** è divisibile per b
- a **non** è multiplo di b
- b **non** è divisore di a
- **non** si può eseguire la divisione esatta $a : b$
- la divisione approssimata $a : b$ dà un resto **diverso da 0**

19 Criteri di divisibilità

Per determinare alcuni dei divisori di un numero dato, si possono applicare i seguenti **criteri**.

- **Divisibilità per 2** Un numero è divisibile per 2 se la sua ultima cifra è pari.
- **Divisibilità per 3** Un numero è divisibile per 3 se la somma delle sue cifre è divisibile per 3.
- **Divisibilità per 4** Un numero è divisibile per 4 se il numero formato dalle sue ultime due cifre è divisibile per 4 o se le sue ultime due cifre sono due zeri.
- **Divisibilità per 5** Un numero è divisibile per 5 se la sua ultima cifra è 0 o 5.
- **Divisibilità per 8** Un numero è divisibile per 8 se il numero formato dalle sue ultime tre cifre è divisibile per 8 o se le sue ultime tre cifre sono tre zeri.
- **Divisibilità per 9** Un numero è divisibile per 9 se la somma delle sue cifre è divisibile per 9.
- **Divisibilità per 10** Un numero è divisibile per 10 se la sua ultima cifra è 0.
- **Divisibilità per 11** Un numero è divisibile per 11 se lo è la differenza tra la somma delle cifre di posto dispari (contandole ad esempio da destra a sinistra), eventualmente aumentata di un multiplo di 11, e la somma delle cifre di posto pari.
- **Divisibilità per 25** Un numero è divisibile per 25 se le sue ultime due cifre sono 00 o 25 o 50 o 75.

ESEMPIO

Consideriamo il numero 1716 e applichiamo a esso, in sequenza, i criteri di divisibilità esposti.

- L'ultima cifra, 6, è pari $\longrightarrow$ 1716 è divisibile per 2.
- La somma delle cifre è $1 + 7 + 1 + 6 = 15$ che è divisibile per 3 $\longrightarrow$ 1716 è divisibile per 3.
- Il numero formato dalle ultime due cifre, 16, è divisibile per 4 $\longrightarrow$ 1716 è divisibile per 4.
- L'ultima cifra non è né 0 né 5 $\longrightarrow$ 1716 non è divisibile per 5.
- Il numero formato dalle ultime tre cifre, 716, non è divisibile per 8 $\longrightarrow$ 1716 non è divisibile per 8.
- La somma delle cifre è 15, che non è divisibile per 9 $\longrightarrow$ 1716 non è divisibile per 9.
- L'ultima cifra non è 0 $\longrightarrow$ 1716 non è divisibile per 10.
- La somma delle cifre di posto dispari è $6 + 7 = 13$, la somma delle cifre di posto pari è $1 + 1 = 2$ e si ha $13 - 2 = 11$, che è divisibile per 11 $\longrightarrow$ 1716 è divisibile per 11.
- Il numero formato dalle ultime due cifre è 16 $\longrightarrow$ 1716 non è divisibile per 25.

Numeri primi

20 Definizione di numero primo

DEFINIZIONE NUMERO PRIMO

Un numero naturale si dice primo se è divisibile solo per se stesso e per 1.
Il numero 1, per convenzione, non si considera un numero primo.

ESEMPI

1 Il numero 7 è divisibile solo per 1 e per 7, quindi 7 è un numero primo.

2 Il numero 6 è divisibile, oltre che per 1 e per 6, anche per 2 e per 3: quindi 6 non è un numero primo.

21 Scomposizione in fattori primi

Ogni numero naturale diverso da 0 che **non** sia **primo** si può esprimere, in un solo modo, come **prodotto di fattori primi**. Scomporre in fattori primi un numero naturale significa determinare tali fattori. Per scomporre un numero in fattori primi lo si divide, se possibile, per 2, ossia per il primo numero della successione dei numeri primi. Il quoto ottenuto si divide, se possibile, ancora per 2 e così via finché si ottiene un quoto non divisibile per 2.
A questo punto si divide ripetutamente tale quoto, se possibile, per 3, ossia per il secondo numero della successione dei numeri primi, finché non si ottiene un quoto non divisibile per 3. Si continua così, dividendo per 5, per 7, per 11 e per tutti i numeri primi in successione, fino a quando il quoto risulta 1. I divisori utilizzati in queste divisioni sono i fattori primi del numero dato.

IMPORTANTE

- L'affermazione che ogni numero naturale diverso da zero e non primo possa essere espresso, in modo unico, come prodotto di fattori primi costituisce un fondamentale teorema dell'aritmetica (che non dimostreremo). È per poter esprimere in modo semplice questo teorema che si conviene che il numero 1 non sia primo. In caso contrario, infatti, ogni numero naturale potrebbe essere espresso in infiniti modi diversi come prodotto di fattori primi. Ad esempio
$$6 = 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = \\ = 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \ldots$$
- Ovviamente, per la proprietà commutativa della moltiplicazione, scomposizioni in fattori primi che differiscono solo per l'ordine dei fattori non devono essere considerate diverse.

ESEMPIO

Scomponiamo in fattori primi il numero 6552.

A Dividiamo per 2:

$$6552 : 2 = 3276 \qquad 3276 : 2 = 1638 \qquad 1638 : 2 = 819$$

L'ultimo quoto, 819, non è divisibile per 2.

B Procediamo quindi dividendo per 3:

$$819 : 3 = 273 \qquad 273 : 3 = 91$$

L'ultimo quoto, 91, non è divisibile per 3.

C Considerando i numeri primi successivi a 3, vediamo che 91 non è divisibile per 5 ed è divisibile per 7:

$$91 : 7 = 13$$

D L'ultimo quoto, 13, è un numero primo:

$$13 : 13 = 1$$

Avendo ottenuto come quoto 1, abbiamo terminato; i divisori utilizzati sono 2, 2, 2, 3, 3, 7, 13. Quindi la scomposizione in fattori primi di 6552 è

$$6552 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$$

ossia

$$6552 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$$

Il procedimento descritto si può facilmente eseguire con l'aiuto di uno schema come in **FIGURA 16**.

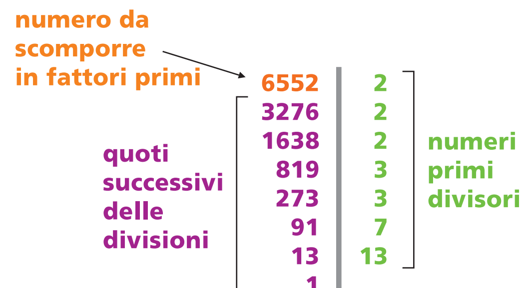

FIGURA 16

Massimo comune divisore e minimo comune multiplo

22 Massimo comune divisore

DEFINIZIONE DIVISORE COMUNE

Si dice divisore comune di due o più numeri naturali ogni numero che sia divisore di tutti i numeri dati.

DEFINIZIONE MASSIMO COMUNE DIVISORE

Il massimo comune divisore (in breve *MCD*) di due o più numeri naturali diversi da zero è il più grande dei loro divisori comuni.

Consideriamo due numeri naturali, ad esempio 24 e 36.

I divisori di 24 sono

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24$$

e i divisori di 36 sono

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36$$

Puoi notare che i numeri 8 e 24 sono divisori di 24, ma non di 36, mentre i numeri 9, 18 e 36 sono divisori di 36 ma non di 24. I numeri 1, 2, 3, 4, 6, 12 sono invece divisori sia di 24 sia di 36: perciò vengono detti *divisori comuni* di 24 e 36. Il più grande di essi, ossia 12, è il **massimo comune divisore** di 24 e 36. In questo esempio abbiamo considerato solo due numeri, ma avremmo potuto considerarne tre o più.

Il MCD di due numeri a e b si indica con la scrittura $MCD(a\,;b)$, quello di tre numeri a, b, c si indica con $MCD(a\,;b\,;c)$ e così via. Osserviamo che 1 è divisore di qualsiasi numero naturale, quindi due o più numeri naturali hanno sempre almeno un divisore comune, cioè il numero 1.
Per determinare il massimo comune divisore di due o più numeri si applica, di solito, la seguente regola.

Regola Per determinare il MCD di due o più numeri naturali diversi da zero si procede così:

A si scompongono in fattori primi i numeri dati;

B si moltiplicano fra loro tutti i fattori primi comuni ai numeri dati, presi una volta sola, ciascuno con l'esponente minore con cui figura: il prodotto così ottenuto è il MCD.

Osserviamo infine che se a è divisore di b, ossia se b è multiplo di a, si ha $MCD(a\,;b) = a$.

ESEMPI

1 Determiniamo $MCD(126\,;360\,;216)$.

A Scomponiamo in fattori primi i numeri dati:

$$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \qquad 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \qquad 216 = 2^3 \cdot 3^3$$

B I fattori primi comuni a tutti i numeri dati sono 2 e 3. L'esponente più piccolo con cui compare il fattore 2 è 1, l'esponente più piccolo con cui compare il 3 è 2.
Quindi

$$MCD(126\,;360\,;216) = 2 \cdot 3^2 = 18$$

2 Determiniamo $MCD(18\,;54)$.

A Scomponiamo in fattori primi i numeri dati:

$$18 = 2 \cdot 3^2 \qquad 54 = 2 \cdot 3^3$$

B Quindi $$MCD(18\,;54) = 2 \cdot 3^2 = 18$$

Osserva che, dei due numeri dati, uno (18) è divisore dell'altro (54): infatti $54 : 18 = 3$.

23 Minimo comune multiplo

DEFINIZIONE MULTIPLO COMUNE

Si dice multiplo comune di due o più numeri naturali ogni numero che sia multiplo di tutti i numeri dati.

DEFINIZIONE MINIMO COMUNE MULTIPLO

Il minimo comune multiplo (in breve mcm) di due o più numeri naturali diversi da zero è il più piccolo dei loro multipli comuni diversi da 0.

Il mcm di due numeri a e b si indica con la scrittura $mcm(a\,;b)$, quello di tre numeri a, b, c si indica con $mcm(a\,;b\,;c)$ e così via. Osserviamo che $a \cdot b$ è multiplo sia di a sia di b, quindi due o più numeri naturali diversi da zero hanno sempre almeno un multiplo comune, cioè il loro prodotto. Lo stesso succede se si considerano tre o più numeri naturali.
Consideriamo i multipli diversi da 0 di due numeri naturali, ad esempio 8 e 12.
I multipli di 8 diversi da zero sono: 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96, ...
I multipli di 12 diversi da 0 sono: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, ...
Osserviamo che, mentre i divisori di un numero sono finiti, i suoi multipli invece sono infiniti. Non possiamo perciò elencarli tutti; per tale motivo dobbiamo usare i puntini di sospensione.
I numeri 24, 48, 72, 96, ... sono multipli sia di 8 sia di 12: per questo motivo vengono detti *multipli comuni* di 8 e 12. Il più piccolo di essi, ossia 24, è il **minimo comune multiplo** di 8 e 12.

Anche in questo caso, anziché considerare solo due numeri, avremmo potuto considerarne tre o più. Per trovare il minimo comune multiplo di due o più numeri, si utilizza la regola seguente.

Regola Per determinare il *mcm* di due o più numeri naturali diversi da zero si procede così:

A si scompongono in fattori primi i numeri dati;

B si moltiplicano tutti i fattori primi, comuni e non comuni, dei numeri dati, presi una volta sola, ciascuno con l'esponente maggiore con cui figura: il prodotto così ottenuto è il *mcm*.

Osserviamo infine che se a è divisore di b, ossia se b è multiplo di a, si ha $mcm(a\,;b) = b$.

ESEMPI

1 Determiniamo $mcm(12\,;15\,;18)$.

A Scomponiamo in fattori primi i numeri dati:

$$12 = 2^2 \cdot 3 \qquad 15 = 3 \cdot 5 \qquad 18 = 2 \cdot 3^2$$

B I fattori primi, comuni e non comuni, di tutti i numeri dati sono 2, 3 e 5. L'esponente maggiore con cui compare il fattore 2 è 2, l'esponente maggiore con cui compare il 3 è 2, l'esponente maggiore con cui compare il 5 è 1. Quindi

$$mcm(12\,;15\,;18) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$$

2 Determiniamo $mcm(18\,;54)$.

A Scomponiamo in fattori primi i numeri dati:

$$18 = 2 \cdot 3^2 \qquad 54 = 2 \cdot 3^3$$

B Quindi $$mcm(18\,;54) = 2 \cdot 3^3 = 54$$

Osserva che, dei due numeri dati, 54 è multiplo di 18 e quindi è anche il minimo comune multiplo.

24 Numeri primi tra loro

DEFINIZIONE **NUMERI PRIMI TRA LORO**

Due o più numeri naturali si dicono primi tra loro se il loro massimo comune divisore è 1.

Nelle applicazioni è utile ricordare quanto segue.

- Per stabilire se due numeri sono primi tra loro è sufficiente esaminarne le scomposizioni in fattori primi. Infatti se due numeri non hanno fattori primi in comune, sono primi tra loro.
- Il minimo comune multiplo di due numeri primi tra loro è il loro prodotto.

ESEMPI

1 Consideriamo i numeri 50 e 63. Si ha

$$50 = 2 \cdot 5^2 \qquad 63 = 3^2 \cdot 7$$

I fattori primi di 50 sono 2 e 5; nessuno di essi è fattore primo di 63. Dunque 50 e 63 sono primi tra loro. In effetti si ha $MCD(50\,;63) = 1$. Puoi inoltre notare che il loro minimo comune multiplo risulta uguale al loro prodotto. Infatti

$$mcm(50\,;63) = \underbrace{2 \cdot 5^2} \cdot \underbrace{3^2 \cdot 7} = 50 \cdot 63 = 3150$$

2 Consideriamo ora i numeri 48 e 30. Si ha

$$48 = 2^4 \cdot 3 \qquad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

I fattori primi 2 e 3 sono comuni a 48 e a 30. Dunque 48 e 30 *non* sono primi tra loro. In effetti il loro massimo comune divisore non è 1 perché si ha $MCD(48\,;30) = 2 \cdot 3 = 6$.