

Laboratorio di matematica

G Grafico della funzione $y = \sin x$

Utilizzare GeoGebra per costruire il grafico della funzione $y = \sin x$ a partire dalla sua definizione mediante la circonferenza goniometrica.

Come sai, il valore della funzione $\sin x$ rappresenta l'ordinata del punto della circonferenza goniometrica associato a un angolo al centro la cui ampiezza misura x . In questa esercitazione ci proponiamo di costruire il grafico di $y = \sin x$ applicando direttamente questa definizione.

Nelle finestre di GeoGebra di questa esercitazione sono visibili *Assi*, *Griglia* e *Vista Algebra*. Questi elementi si possono visualizzare o nascondere grazie alle relative voci del menu *Visualizza*.

Definiamo l'unità di misura degli angoli

Vogliamo tracciare il grafico utilizzando i radianti come unità di misura degli angoli: dal menu *Opzioni* scegliamo la voce *Unità angoli* e nel relativo sottomenu facciamo clic su *Radianti* (FIGURA 1).

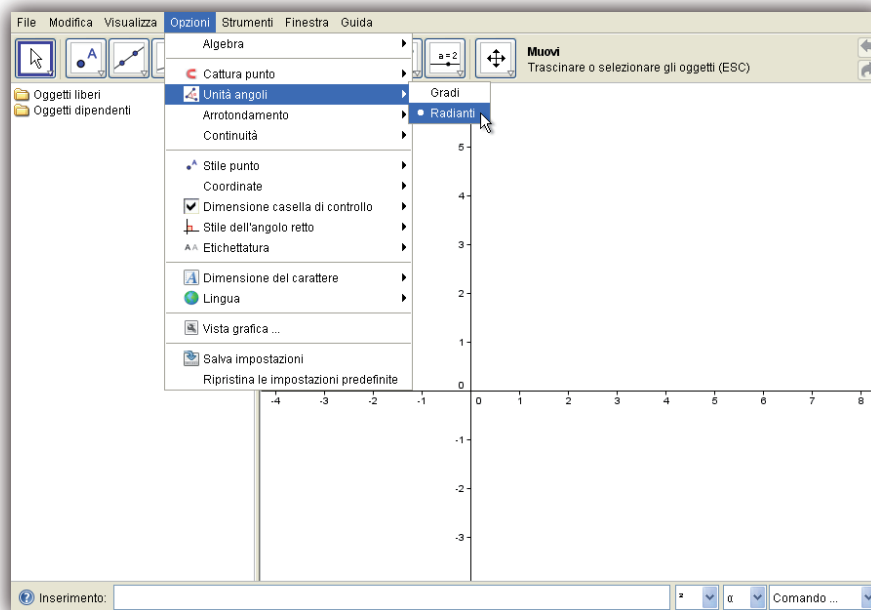


FIGURA 1

Tracciamo la circonferenza goniometrica

Per evitare sovrapposizioni con il grafico che vogliamo costruire, posizioneremo il centro della circonferenza goniometrica nel punto di coordinate $(-2; 0)$ anziché nell'origine (FIGURA 2). Ciò equivale a traslare la circonferenza goniometrica di due unità verso sinistra: tale trasformazione cambia le ascisse dei suoi punti, ma non le ordinate. Poiché il seno di un angolo è rappresentato dall'ordinata del punto della circonferenza goniometrica ad esso associato, questa traslazione non avrà influenza sul grafico che vogliamo costruire.

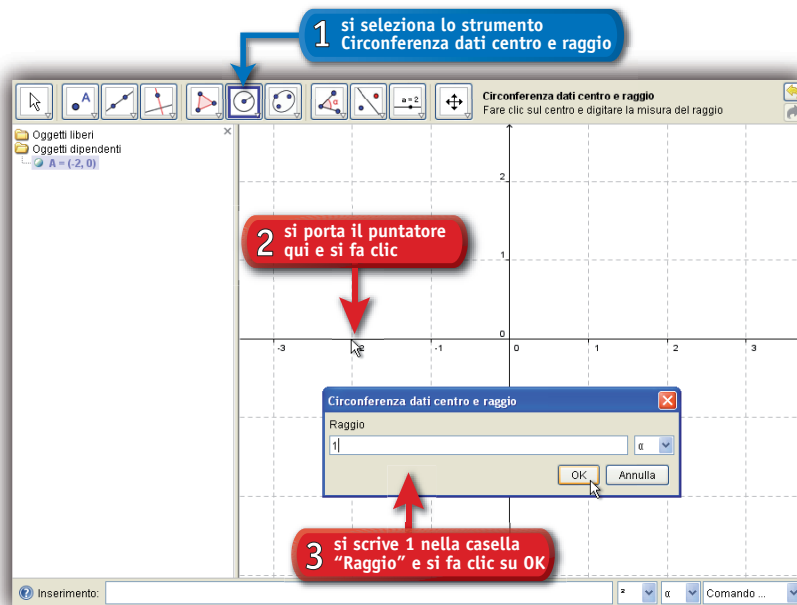


FIGURA 2

1. Selezioniamo, nel sesto menu, lo strumento *Circonferenza dati centro e raggio*, denotato dall'icona
2. Portiamo il puntatore vicino al punto dell'asse delle x di ascissa -2 e facciamo *clic* per indicare la posizione del centro della circonferenza.
3. Compare la finestra *Circonferenza dati centro e raggio*; scriviamo 1 nella casella *Raggio* e facciamo *clic* sul pulsante *OK*.

GeoGebra disegna la circonferenza e il suo centro. Coloriamo in blu la circonferenza e assegniamo il nome O_1 al suo centro.

■ Creiamo uno slider per controllare l'ampiezza dell'angolo al centro

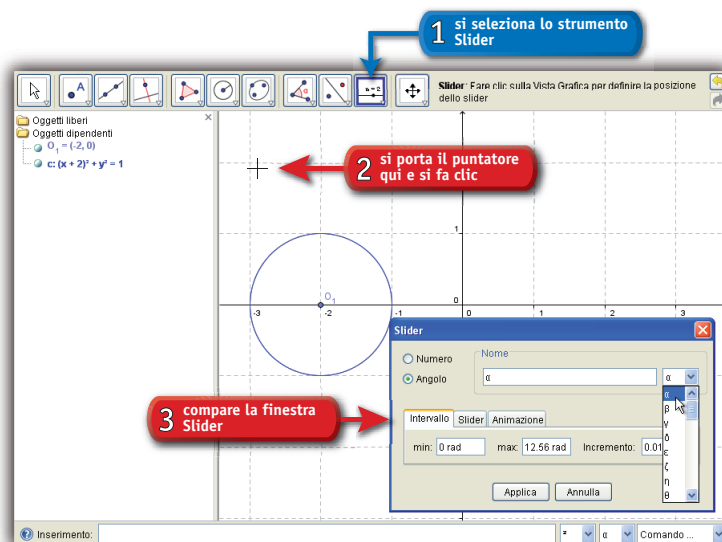


FIGURA 3

1. Selezioniamo, nell'ottavo menu, lo strumento *Angolo di data misura*, denotato dall'icona  (FIGURA 4).
2. Portiamo il puntatore vicino al punto A e, quando questo appare evidenziato, facciamo *click* per indicare un punto del primo lato dell'angolo.
3. Portiamo il puntatore vicino al punto O_1 e, quando questo appare evidenziato, facciamo *click* per indicare il vertice dell'angolo.
4. Compare la finestra *Angolo di data misura*. Nella casella *Angolo*, dopo aver cancellato l'eventuale contenuto, scriviamo α per indicare la misura dell'ampiezza dell'angolo; controlliamo che sia selezionata l'opzione *antiorario* e quindi facciamo *click* su *OK*.

GeoGebra crea l'angolo β di vertice O_1 , che nascondiamo, e il punto A' sulla circonferenza; cambiamo il nome di questo punto in B e coloriamolo in verde.

L'ordinata del punto B rappresenta il seno di α ; poiché la circonferenza goniometrica ha raggio unitario, α è anche la misura dell'arco AB .

■ Costruiamo l'arco AB

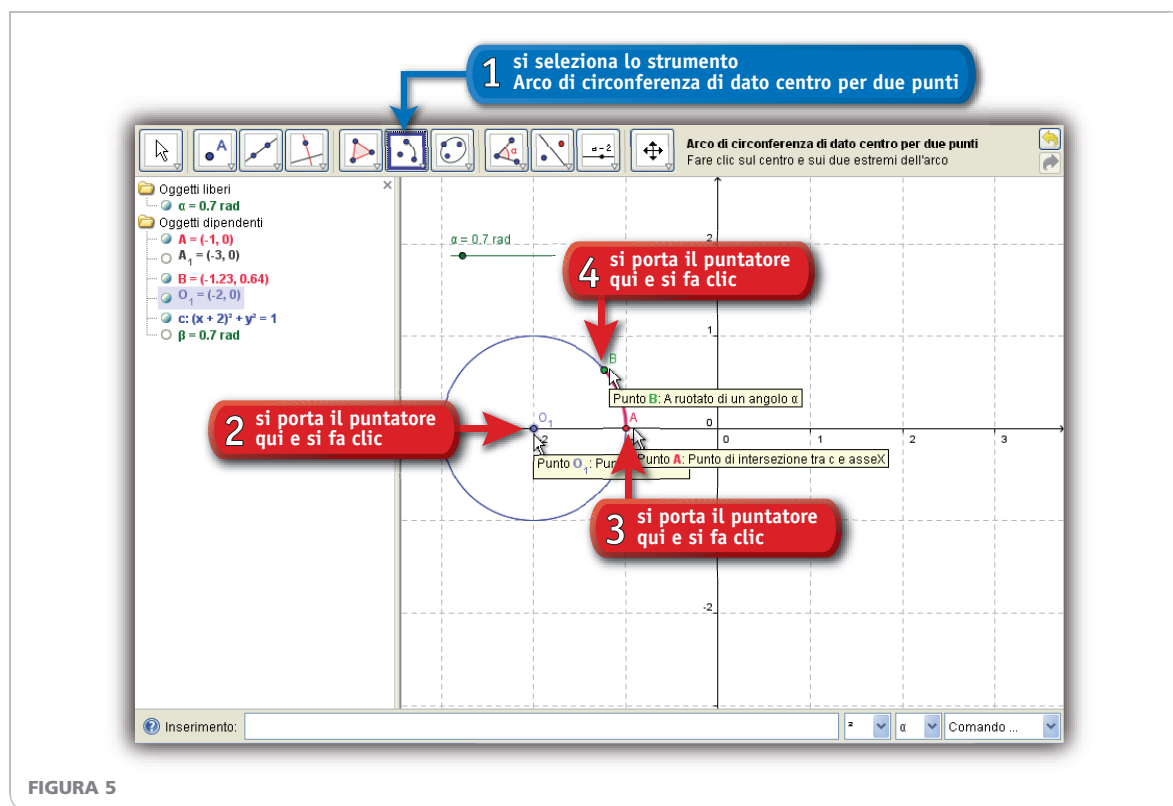


FIGURA 5

1. Selezioniamo, nel sesto menu, lo strumento *Arco di circonferenza di dato centro per due punti*, denotato dall'icona  (FIGURA 5).
2. Portiamo il puntatore vicino al punto O_1 e, quando questo appare evidenziato, facciamo *click* per indicare il centro della circonferenza che contiene l'arco.
3. Portiamo il puntatore vicino al punto A e, quando questo appare evidenziato, facciamo *click* per indicare il primo estremo dell'arco.
4. Portiamo il puntatore vicino al punto B e, quando questo appare evidenziato, facciamo *click* per indicare il secondo estremo dell'arco.

Coloriamo quindi in rosso l'arco ora creato.

Vogliamo ora tracciare il segmento HB , essendo H la proiezione di B sull'asse delle ascisse (ricordiamo che l'ordinata di H rappresenta il valore di $\sin \alpha$).

■ Tracciamo la retta per B parallela all'asse delle ordinate

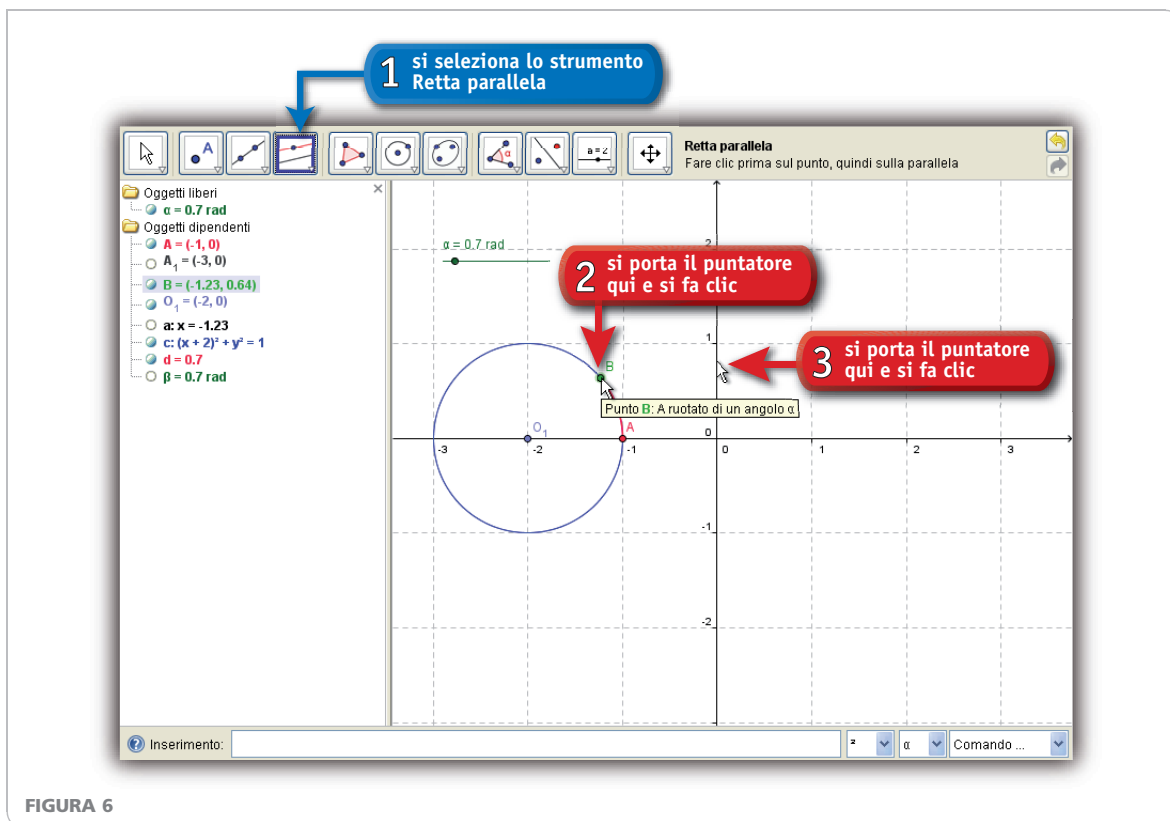


FIGURA 6

1. Selezioniamo, nel quarto menu, lo strumento *Retta parallela*, denotato dall'icona  (FIGURA 6).
2. Portiamo il puntatore vicino al punto B e, quando questo appare evidenziato, facciamo *clic* per indicare il punto per cui deve passare la nuova retta.
3. Portiamo il puntatore vicino all'asse delle y e facciamo *clic* per indicare la retta cui deve essere parallela la nuova retta.

Viene creata la retta a .

A questo punto occorre eseguire alcune semplici operazioni che descriviamo brevemente.

■ Costruiamo il punto H

Selezioniamo, nel secondo menu, lo strumento *Intersezione di due oggetti*, denotato dall'icona , e con esso facciamo *clic* prima sulla retta a e poi sull'asse delle ordinate. GeoGebra crea il punto d'intersezione tra le due rette. Assegniamogli il nome H e coloriamolo in verde, quindi nascondiamo la retta a . Puoi osservare il punto H nella FIGURA 7.

■ Costruiamo il segmento HB

Selezioniamo, nel terzo menu, lo strumento *Segmento tra due punti*, denotato dall'icona , e con esso facciamo *clic* prima sul punto H e quindi sul punto B . Coloriamo in verde anche il segmento HB (FIGURA 7). Possiamo poi creare anche il segmento O_1B che, pur non essendo necessario, migliora la leggibilità della figura.

Possiamo ora cominciare la costruzione del punto P del grafico della funzione $y = \sin x$. Tale punto deve avere ordinata uguale a quella di B . I punti che hanno questa proprietà si trovano sulla parallela all'asse delle ascisse passante per B .

■ Costruiamo la parallela all'asse x passante per B

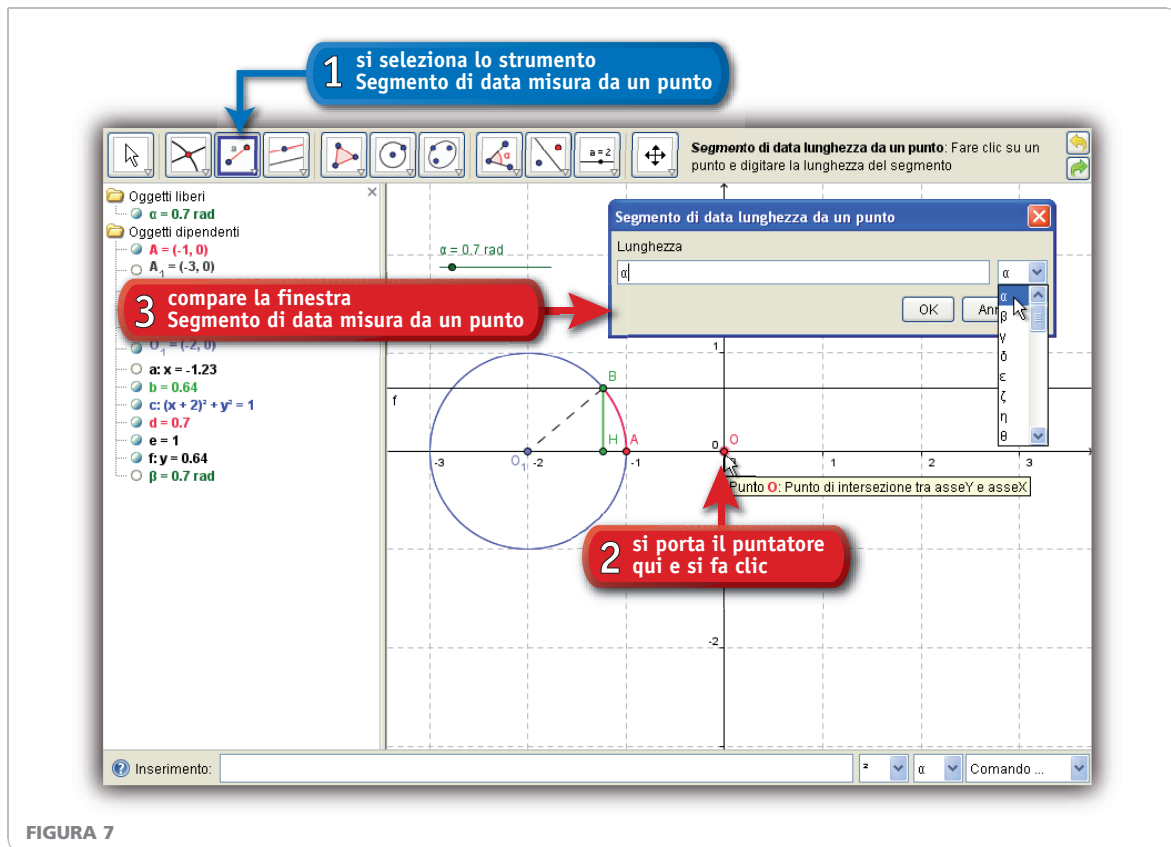
Selezioniamo, nel quarto menu, lo strumento *Retta parallela* e con esso facciamo *clic* prima sul punto B e poi sull'asse delle ascisse. GeoGebra crea la parallela f (FIGURA 7).

L'ascissa del punto P dev'essere uguale ad α , che è la misura in radianti dell'angolo al centro $\widehat{AO_1B}$ e che, come abbiamo detto, coincide con la misura dell'arco AB . Riporteremo pertanto, sull'asse delle ascisse, un segmento OQ di misura α .

■ Costruiamo il punto O

Per prima cosa dobbiamo disegnare il punto O : selezioniamo, nel secondo menu, lo strumento *Intersezione di due oggetti* e con esso facciamo *clic* prima sull'asse x e poi sull'asse y . Assegniamo il nome O al punto così creato e coloriamolo in rosso.

■ Costruiamo il segmento OQ



1. Selezioniamo, nel quarto menu, lo strumento *Segmento di data lunghezza da un punto*, denotato dall'icona  (FIGURA 7).
2. Portiamo il puntatore vicino al punto O e, quando questo appare evidenziato, facciamo *clic* per indicare il primo estremo del segmento.
3. Compare la finestra *Segmento di data lunghezza da un punto*. Nella casella *Lunghezza* scriviamo α per indicare la misura della lunghezza del segmento e quindi facciamo *clic* su *OK*.

GeoGebra disegna il segmento e il suo secondo estremo: assegniamo a questo il nome Q e coloriamolo in verde. Coloriamo poi il segmento OQ in rosso, per indicare che la sua lunghezza è uguale a quella dell'arco AB , anch'esso colorato in rosso.

Per determinare il punto P basta ora tracciare una retta per Q parallela all'asse y ; l'intersezione di questa con la parallela all'asse x passante per Q è il punto P cercato.

■ Costruiamo la parallela all'asse y passante per Q

Selezioniamo, nel quarto menu, lo strumento *Retta parallela* e con esso facciamo *clic* prima sul punto Q e poi sull'asse delle ordinate. GeoGebra crea la parallela h .

■ Costruiamo il punto P

Selezioniamo, nel secondo menu, lo strumento *Intersezione di due oggetti* e con esso facciamo *clic* prima sulla parallela all'asse x passante per B e poi sulla parallela all'asse y passante per Q . Assegniamo il nome P al punto così creato e coloriamolo in verde.

Per rendere più chiara la figura costruiamo il segmento QP e coloriamolo per esempio in verde, costruiamo poi il segmento BP ed evidenziamolo con il tratteggio. Nascondiamo poi le rette parallele agli assi passanti per P (FIGURA 8).

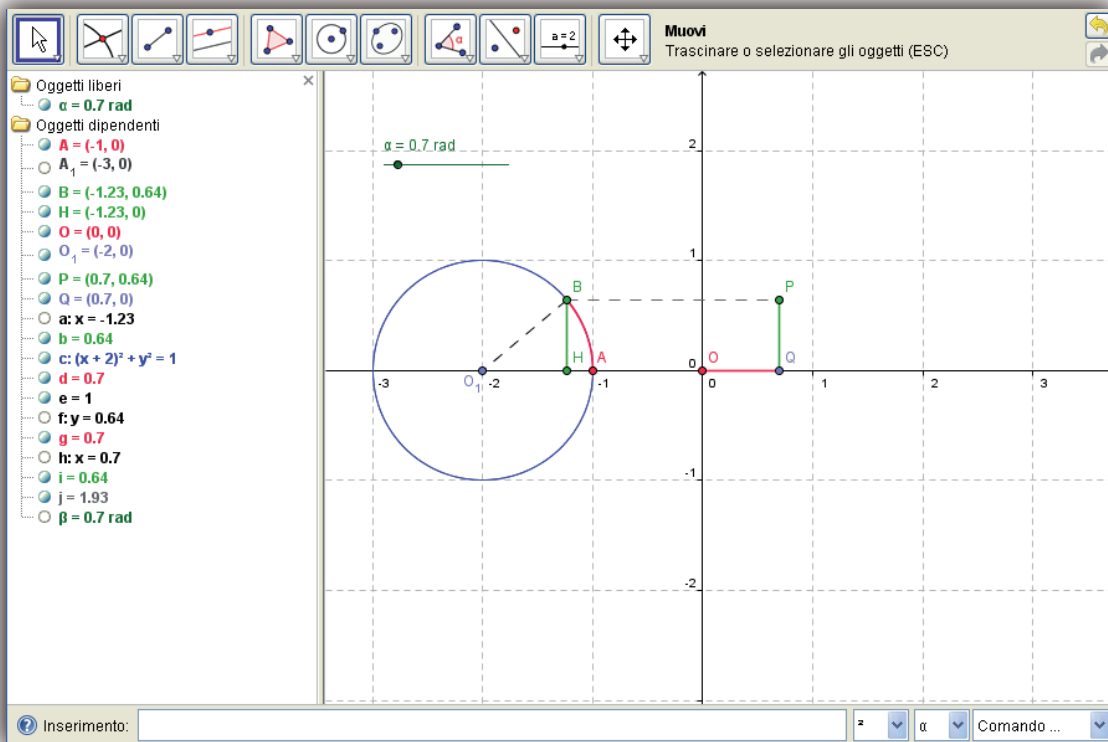


FIGURA 8

Puoi ora trascinare il punto dello slider α : in questo modo il parametro α assumerà i valori da 0 a 2π e contemporaneamente il punto B descriverà la circonferenza goniometrica e il punto P si sposterà descrivendo il grafico della funzione $y = \sin x$.

VARIABILE RISERVATA

Poiché abbiamo assegnato alla misura in radianti dell'angolo al centro AO_1B il nome α , dovremmo dire che l'equazione del grafico ottenuto è $y = \sin \alpha$.

Ma in GeoGebra le ascisse sono indicate con la lettera x e le ordinate con la y e non c'è modo di cambiare queste impostazioni. Perché allora non abbiamo utilizzato la x per indicare la misura dell'angolo al centro?

Per lo stesso motivo: la lettera x in GeoGebra è destinata a indicare le ascisse del piano cartesiano e non può essere utilizzata per indicare una variabile.

[illegible]**FIGURA 9**

- Il disegno si animerà: il punto B descriverà la circonferenza goniometrica e contemporaneamente il punto P tratterrà il grafico di $y = \sin x$ (**ANIMAZIONE 1** o anche **FIGURA 10**).



ANIMAZIONE 1

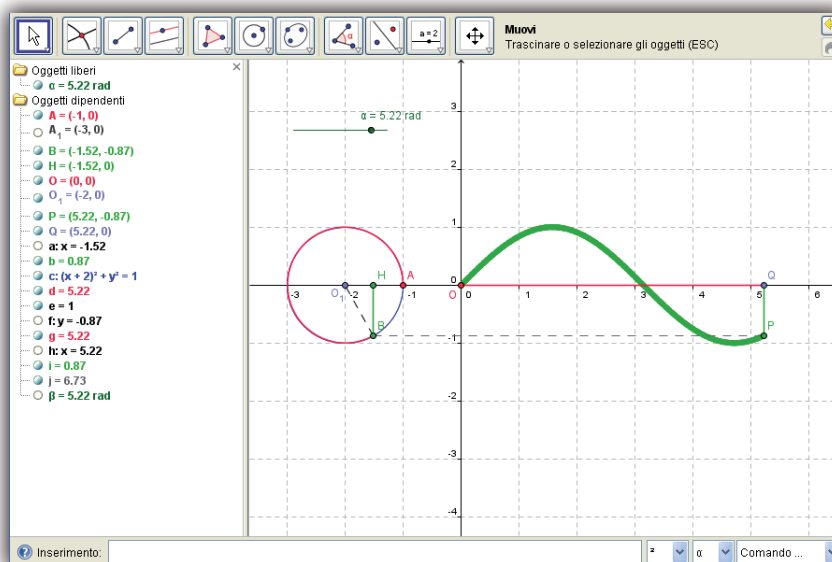


FIGURA 10

SCORCIATOIE

Avremmo potuto raggiungere il nostro scopo con una costruzione più semplice: dopo aver disegnato la circonferenza e i suoi punti A e B come descritto, avremmo potuto scrivere, nella casella d'inserimento, $P = (\alpha, y(B))$ per definire il punto P di ascissa α e ordinata uguale all'ordinata di B .

La realizzazione che abbiamo proposto è più complessa ma permette di visualizzare meglio la costruzione del grafico. Il segmento OQ e l'arco AB , dello stesso colore, ci permettono di capire che l'ascissa di P è la misura della lunghezza dell'arco AB , i segmenti HB e QP rendono visivamente il concetto che il valore di $\sin x$ è l'ordinata di B , il segmento BP che collega i due punti si muove restando parallelo all'asse delle x per evidenziare che B e P hanno sempre la stessa ordinata.