Laboratorio di matematica

G Grafico della funzione y = sen x

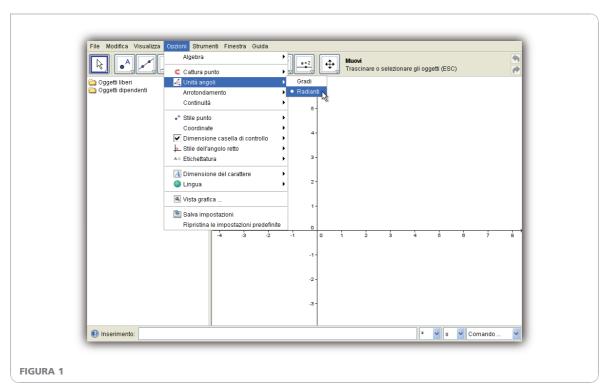
Utilizzare GeoGebra per costruire il grafico della funzione y = sen x a partire dalla sua definizione mediante la circonferenza goniometrica.

Come sai, il valore della funzione sen x rappresenta l'ordinata del punto della circonferenza goniometrica associato a un angolo al centro la cui ampiezza misura x. In questa esercitazione ci proponiamo di costruire il grafico di y = sen x applicando direttamente questa definizione.

Nelle finestre di GeoGebra di questa esercitazione sono visibili *Assi, Griglia* e *Vista Algebra*. Questi elementi si possono visualizzare o nascondere grazie alle relative voci del menu *Visualizza*.

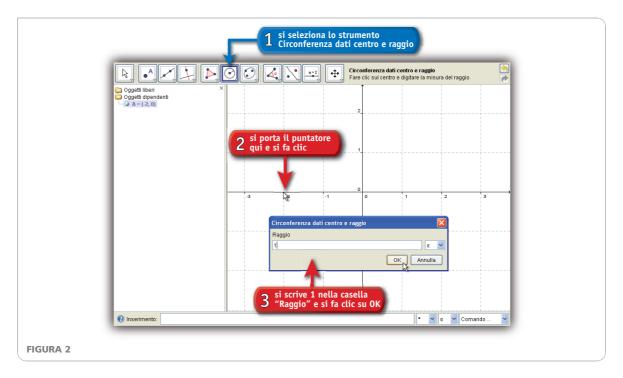
Definiamo l'unità di misura degli angoli

Vogliamo tracciare il grafico utilizzando i radianti come unità di misura degli angoli: dal menu *Opzioni* scegliamo la voce *Unità angoli* e nel relativo sottomenu facciamo *clic* su *Radianti* (FIGURA 1).



■ Tracciamo la circonferenza goniometrica

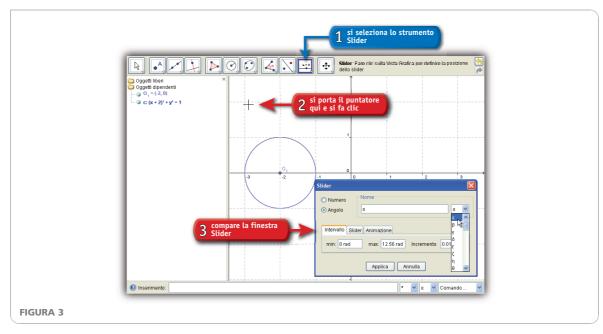
Per evitare sovrapposizioni con il grafico che vogliamo costruire, posizioneremo il centro della circonferenza goniometrica nel punto di coordinate (-2;0) anziché nell'origine (figura 2). Ciò equivale a traslare la circonferenza goniometrica di due unità verso sinistra: tale trasformazione cambia le ascisse dei suoi punti, ma non le ordinate. Poiché il seno di un angolo è rappresentato dall'ordinata del punto della circonferenza goniometrica ad esso associato, questa traslazione non avrà influenza sul grafico che vogliamo costruire.



- **1.** Selezioniamo, nel sesto menu, lo strumento *Circonferenza dati centro e raggio*, denotato dallicona .
- **2.** Portiamo il puntatore vicino al punto dell'asse delle x di ascissa -2 e facciamo clic per indicare la posizione del centro della circonferenza.
- **3.** Compare la finestra *Circonferenza dati centro e raggio*; scriviamo 1 nella casella *Raggio* e facciamo *clic* sul pulsante *OK*.

Geo Gebra disegna la circonferenza e il suo centro. Coloriamo in blu la circonferenza e assegniamo il nome O_1 al suo centro.

Creiamo uno slider per controllare l'ampiezza dell'angolo al centro



- **1.** Selezioniamo, nel penultimo menu, lo strumento *Slider*, denotato dall'icona (FIGURA 3).
- **2.** Portiamo il puntatore in una zona vuota della finestra di GeoGebra e facciamo *clic* per indicare il punto in cui vogliamo inserire lo *slider*.
- **3.** Compare la finestra *Slider*.

SLIDER

Gli *slider* sono dei cursori che permettono di controllare il valore di un parametro.

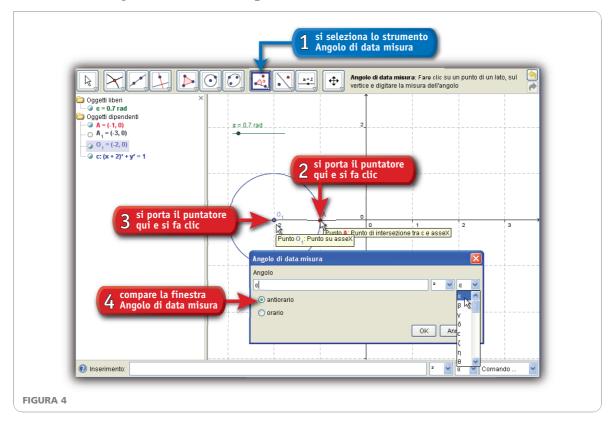
Ogni volta che si inserisce uno slider GeoGebra crea una nuova variabile, che compare nella colonna *Vista algebra* con lo stesso nome dello slider. Trascinando il cursore dello slider viene modificato il valore della variabile che gli corrisponde.

- Facciamo *clic* sul tondino a sinistra di *Angolo* per indicare che il parametro che stiamo definendo rappresenta la misura dell'ampiezza di un angolo; nella casella *Nome* scriviamo α ; se questo carattere non è già preimpostato possiamo ottenerlo scegliendolo dal menu a tendina che compare a fianco della casella *Nome*. In questo modo abbiamo definito il nome dello slider e del parametro ad esso associato.
- Nelle caselle min e max scriviamo rispettivamente i numeri 0 e 6,28, se non sono già preimpostati; il secondo numero è un'approssimazione di 2π (ricorda di scrivere il punto al posto della virgola decimale). In questo modo definiamo gli estremi dell'intervallo in cui potrà variare il valore del parametro α . Infine facciamo clic sul pulsante Applica.

Costruiamo il primo estremo dell'angolo al centro

L'angolo al centro della circonferenza goniometrica deve avere un estremo in uno dei punti in cui questa interseca l'asse delle ascisse. Pertanto selezioniamo, nel secondo menu, il pulsante $Intersezione\ di\ due\ oggetti$, denotato dall'icona $\$, e con esso facciamo clic prima sulla circonferenza e poi sull'asse delle ascisse. GeoGebra crea due punti: nascondiamo il punto di ascissa -3 e assegniamo al punto di ascissa -1 il nome A, colorandolo poi in rosso.

Costruiamo l'angolo al centro di ampiezza α

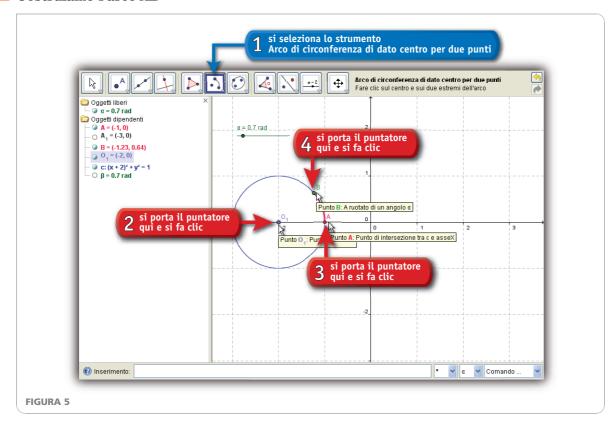


- **1.** Selezioniamo, nell'ottavo menu, lo strumento *Angolo di data misura*, denotato dall'icona (FIGURA 4).
- **2.** Portiamo il puntatore vicino al punto A e, quando questo appare evidenziato, facciamo *clic* per indicare un punto del primo lato dell'angolo.
- **3.** Portiamo il puntatore vicino al punto O_1 e, quando questo appare evidenziato, facciamo *clic* per indicare il vertice dell'angolo.
- **4.** Compare la finestra $Angolo\ di\ data\ misura$. Nella casella Angolo, dopo aver cancellato l'eventuale contenuto, scriviamo α per indicare la misura dell'ampiezza dell'angolo; controlliamo che sia selezionata l'opzione $antiorario\ e\ quindi\ facciamo\ clic\ su\ OK.$

GeoGebra crea l'angolo β di vertice O_1 , che nascondiamo, e il punto A' sulla circonferenza; cambiamo il nome di questo punto in B e coloriamolo in verde.

L'ordinata del punto B rappresenta il seno di α ; poiché la circonferenza goniometrica ha raggio unitario, α è anche la misura dell'arco AB.

Costruiamo l'arco AB

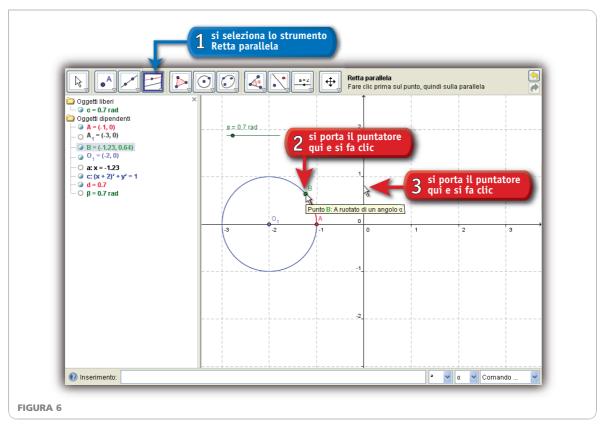


- **1.** Selezioniamo, nel sesto menu, lo strumento *Arco di circonferenza di dato centro per due punti*, denotato dall'icona (figura 5).
- **2.** Portiamo il puntatore vicino al punto O_1 e, quando questo appare evidenziato, facciamo *clic* per indicare il centro della circonferenza che contiene l'arco.
- **3.** Portiamo il puntatore vicino al punto A e, quando questo appare evidenziato, facciamo clic per indicare il primo estremo dell'arco.
- **4.** Portiamo il puntatore vicino al punto *B* e, quando questo appare evidenziato, facciamo *clic* per indicare il secondo estremo dell'arco.

Coloriamo quindi in rosso l'arco ora creato.

Vogliamo ora tracciare il segmento HB, essendo H la proiezione di B sull'asse delle ascisse (ricordiamo che l'ordinata di H rappresenta il valore di $sen \alpha$).

■ Tracciamo la retta per *B* parallela all'asse delle ordinate



- 1. Selezioniamo, nel quarto menu, lo strumento Retta parallela, denotato dall'icona [1] (FIGURA 6).
- **2.** Portiamo il puntatore vicino al punto B e, quando questo appare evidenziato, facciamo clic per indicare il punto per cui deve passare la nuova retta.
- **3.** Portiamo il puntatore vicino all'asse delle y e facciamo clic per indicare la retta cui deve essere parallela la nuova retta.

Viene creata la retta a.

A questo punto occorre eseguire alcune semplici operazioni che descriviamo brevemente.

\blacksquare Costruiamo il punto H

Costruiamo il segmento *HB*

Selezioniamo, nel terzo menu, lo strumento $Segmento\ tra\ due\ punti$, denotato dall'icona , e con esso facciamo clic prima sul punto H e quindi sul punto B. Coloriamo in verde anche il segmento HB (FIGURA 7). Possiamo poi creare anche il segmento O_1B che, pur non essendo necessario, migliora la leggibilità della figura.

Possiamo ora cominciare la costruzione del punto P del grafico della funzione y = sen x. Tale punto deve avere ordinata uguale a quella di B. I punti che hanno questa proprietà si trovano sulla parallela all'asse delle ascisse passante per B.

Costruiamo la parallela all'asse x passante per B

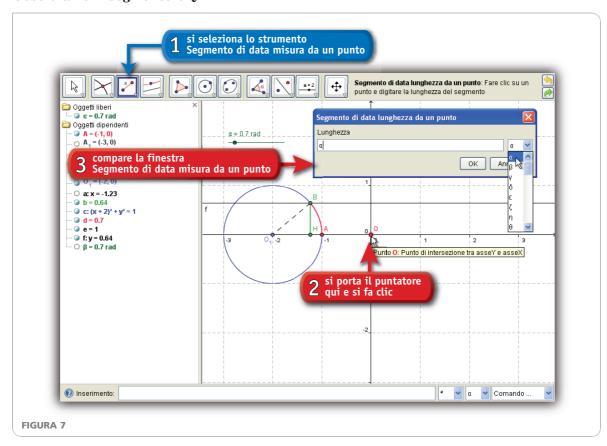
Selezioniamo, nel quarto menu, lo strumento $Retta\ parallela\ e\ con\ esso\ facciamo\ clic\ prima\ sul punto <math>B$ e poi sull'asse delle ascisse. GeoGebra crea la parallela f (FIGURA 7).

L'ascissa del punto P dev'essere uguale ad α , che è la misura in radianti dell'angolo al centro $A\widehat{O}_1B$ e che, come abbiamo detto, coincide con la misura dell'arco AB. Riporteremo pertanto, sull'asse delle ascisse, un segmento OQ di misura α .

Costruiamo il punto O

Per prima cosa dobbiamo disegnare il punto O: selezioniamo, nel secondo menu, lo strumento Intersezione di due oggetti e con esso facciamo <math>clic prima sull'asse x e poi sull'asse y. Assegniamo il nome O al punto così creato e coloriamolo in rosso.

■ Costruiamo il segmento OQ



- **1.** Selezioniamo, nel quarto menu, lo strumento *Segmento di data lunghezza da un punto*, denotato dall'icona (FIGURA 7).
- **2.** Portiamo il puntatore vicino al punto *O* e, quando questo appare evidenziato, facciamo *clic* per indicare il primo estremo del segmento.
- **3.** Compare la finestra Segmento di data lunghezza da un punto. Nella casella Lunghezza scriviamo α per indicare la misura della lunghezza del segmento e quindi facciamo clic su OK.

GeoGebra disegna il segmento e il suo secondo estremo: assegniamo a questo il nome Q e coloriamolo in verde. Coloriamo poi il segmento OQ in rosso, per indicare che la sua lunghezza è uguale a quella dell'arco AB, anch'esso colorato in rosso.

Per determinare il punto P basta ora tracciare una retta per Q parallela all'asse y; l'intersezione di questa con la parallela all'asse x passante per Q è il punto P cercato.

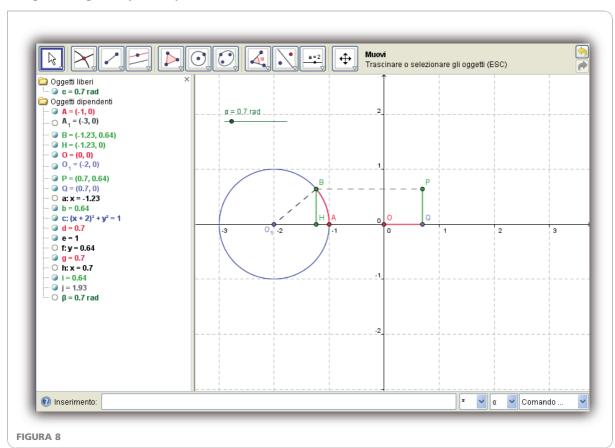
Costruiamo la parallela all'asse y passante per Q

Selezioniamo, nel quarto menu, lo strumento $Retta\ parallela\ e\ con\ esso\ facciamo\ clic\ prima\ sul punto <math>Q$ e poi sull'asse delle ordinate. GeoGebra crea la parallela h.

Costruiamo il punto *P*

Selezioniamo, nel secondo menu, lo strumento $Intersezione\ di\ due\ oggetti\ e\ con\ esso\ facciamo\ clic\ prima\ sulla parallela\ all'asse\ x\ passante\ per\ B\ e\ poi\ sulla\ parallela\ all'asse\ y\ passante\ per\ Q.$ Assegniamo il nome P al punto così creato e coloriamolo in verde.

Per rendere più chiara la figura costruiamo il segmento QP e coloriamolo per esempio in verde, costruiamo poi il segmento BP ed evidenziamolo con il tratteggio. Nascondiamo poi le rette parallele agli assi passanti per P (figura 8).



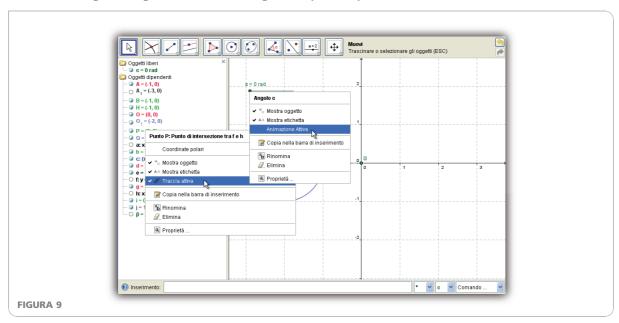
Puoi ora trascinare il punto dello slider α : in questo modo il parametro α assumerà i valori da 0 a 2π e contemporaneamente il punto B descriverà la circonferenza goniometrica e il punto P si sposterà descrivendo il grafico della funzione y = sen x.

VARIABILE RISERVATA

Poiché abbiamo assegnato alla misura in radianti dell'angolo al centro $A\widehat{O}_1B$ il nome α , dovremmo dire che l'equazione del grafico ottenuto è $y=sen\,\alpha$.

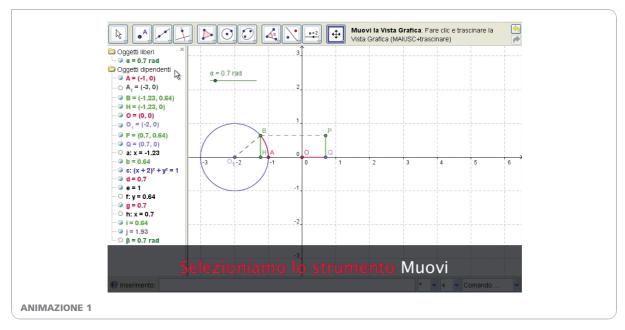
Ma in GeoGebra le ascisse sono indicate con la lettera x e le ordinate con la y e non c'è modo di cambiare queste impostazioni. Perché allora non abbiamo utilizzato la x per indicare la misura dell'angolo al centro? Per lo stesso motivo: la lettera x in GeoGebra è destinata a indicare le ascisse del piano cartesiano e non può essere utilizzata per indicare una variabile.

Possiamo disegnare il grafico nel modo seguente (FIGURA 9).



- Per prima cosa riduciamo la scala del disegno (è sufficiente agire sulla rotella del mouse) fino a che sull'asse delle ascisse siano visibili i punti che hanno ascissa di poco maggiore di 6.
- Trasciniamo il punto dello slider α completamente a sinistra, in modo che α assuma il valore 0. Così facendo, il punto B si sovrappone al punto A e i punti P e Q si sovrappongono ad O.
- Facciamo clic con il pulsante destro del mouse sul punto P nella colonna Vista Algebra (nella Vista grafica il punto P è ora sovrapposto a O e Q) e, nel menu contestuale che appare, facciamo clic sulla voce Traccia attiva.
- Facciamo *clic* con il pulsante destro del mouse sul cursore dello slider α e, nel menu contestuale che appare, facciamo *clic* sulla voce *Traccia attiva*.

Il disegno si animerà: il punto B descriverà la circonferenza goniometrica e contemporaneamente il punto P traccerà il grafico di $y = sen\,x$ (animazione 1 o anche figura 10).



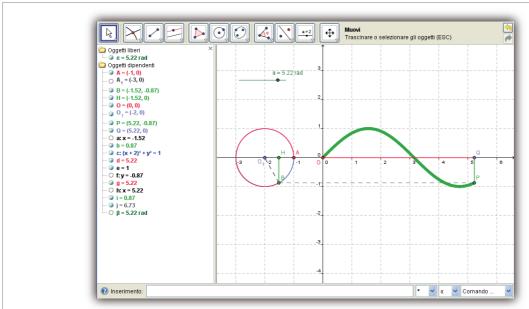


FIGURA 10

SCORCIATOIE

Avremmo potuto raggiungere il nostro scopo con una costruzione più semplice: dopo aver disegnato la circonferenza e i suoi punti A e B come descritto, avremmo potuto scrivere, nella casella d'inserimento, $P=(\alpha,y(B))$ per definire il punto P di ascissa α e ordinata uguale all'ordinata di B.

La realizzazione che abbiamo proposto è più complessa ma permette di visualizzare meglio la costruzione del grafico. Il segmento OO e l'arco AB, dello stesso colore, ci permettono di capire che l'ascissa di P è la misura della lunghezza dell'arco AB, i segmenti BB e BB rendono visivamente il concetto che il valore di BB il segmento BB che collega i due punti si muove restando parallelo all'asse delle BB per evidenziare che BB e BB hanno sempre la stessa ordinata.