Laboratorio di matematica

D Sistemi simmetrici

Come noto, *Derive* dispone di un apposito comando che permette la risoluzione immediata dei sistemi. Utilizziamolo per risolvere il sistema simmetrico

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -8 \end{cases} \qquad \boxed{1}$$

Dal menu *Risolvi* scegliamo *Sistema*. Compare una finestra di dialogo (FIGURA 1) in cui dobbiamo inserire il numero di equazioni del sistema. Scriviamo quindi 2 nell'apposita casella e facciamo clic su *OK*. Nella seconda finestra che compare (FIGURA 2) scriviamo, una per ciascuna riga, le equazioni del sistema. Facciamo clic nella casella sottostante e controlliamo che siano selezionate le incognite del sistema. Infine facciamo clic sul pulsante *Risolvi*.

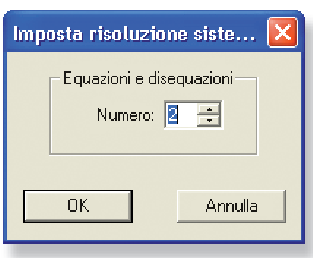

FIGURA 1

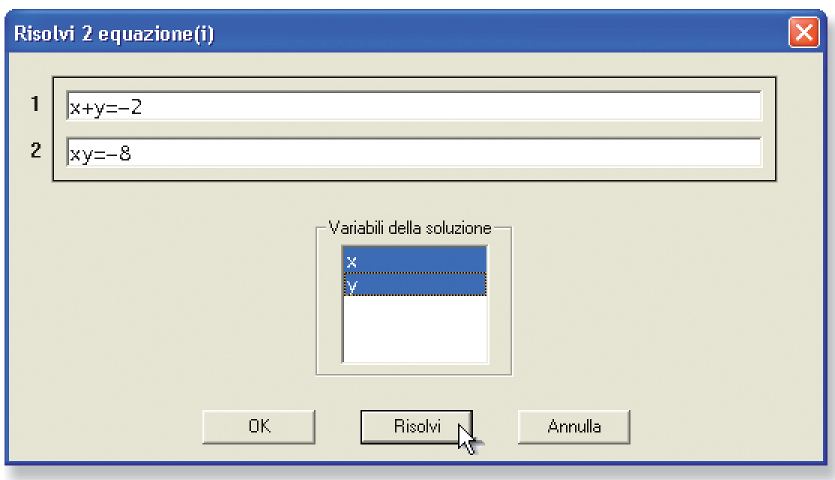

FIGURA 2

Nella finestra di *Derive* compaiono le soluzioni del sistema (espressioni **#1** e **#2** di FIGURA 3). Un sistema simmetrico presenta una «simmetria» nelle soluzioni: le coppie ordinate $(2\,;-4)$ e $(-4\,;2)$ si ottengono l'una dall'altra scambiando tra loro i valori assegnati alle due incognite.

La risoluzione di un sistema simmetrico di secondo grado in forma canonica come il sistema 1 si può ricondurre alla ricerca delle soluzioni dell'equazione di secondo grado $t^2 - st + p = 0$. Nel nostro caso l'equazione è $t^2 + 2t - 8 = 0$. Nella casella d'inserimento scriviamo `t^2+2t-8=0` e premiamo *Invio*. Facciamo clic sul pulsante *Risolvi espressione*, denotato dall'icona . Nella finestra di dialogo che compare controlliamo che nella casella *Dominio della soluzione* sia selezionata la voce *Reale* e facciamo quindi clic sul pulsante *Risolvi*. Otteniamo le soluzioni `t = -4∨t = 2` (espressione **#5** di FIGURA 3) da cui, come sai, si possono dedurre le soluzioni del sistema.

Utilizziamo ora le capacità grafiche di *Derive* per studiare il sistema 1.

Per aprire la finestra grafica selezioniamo il pulsante . Per visualizzare contemporaneamente sia la finestra di algebra sia la finestra grafica apriamo il menu *Finestra* e scegliamo la voce *Disponi verticalmente*.

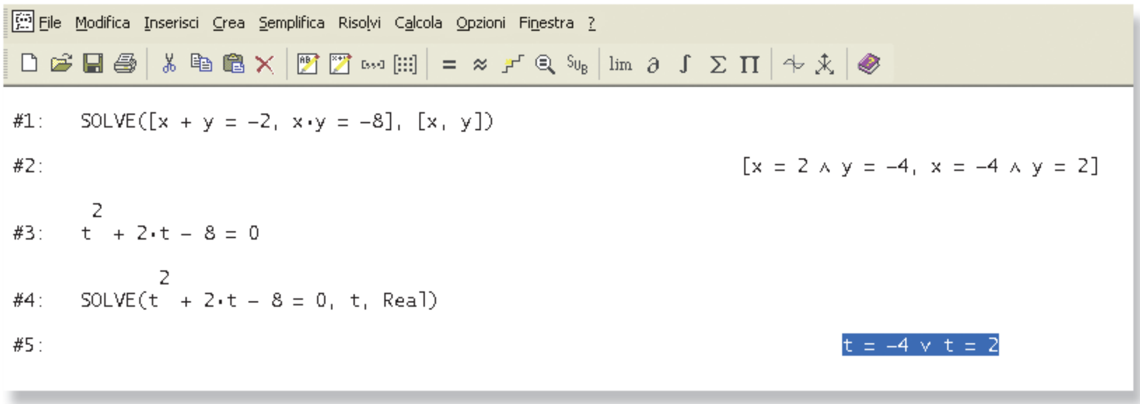

FIGURA 3

Nella finestra di algebra selezioniamo, nell'espressione **#1**, la prima equazione, facendo clic sopra di essa, fino a quando appare evidenziata solo l'espressione **x+y=–2**. Attiviamo la finestra grafica facendo clic all'interno di essa e selezioniamo il pulsante . Nella finestra grafica viene tracciata la retta di equazione $x + y = -2$. Torniamo alla finestra di algebra e ripetiamo il procedimento per la seconda equazione: nella finestra grafica viene tracciata l'iperbole equilatera di equazione $xy = -8$. La **FIGURA 4**, dove abbiamo tracciato anche la bisettrice del primo e terzo quadrante, mostra il risultato. Notiamo che entrambi i grafici sono *simmetrici* rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante e quindi lo sono anche le loro intersezioni, che corrispondono alle soluzioni del sistema.

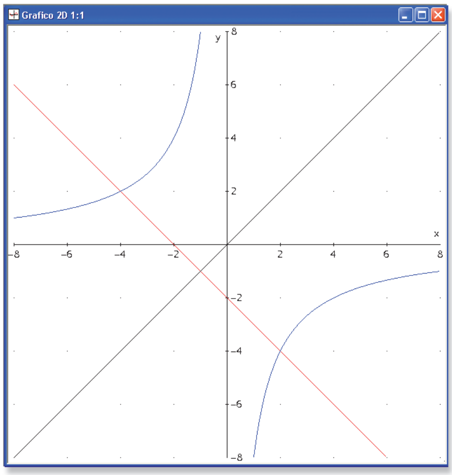

FIGURA 4

Ci proponiamo ora di risolvere il seguente sistema simmetrico

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$ **2**

Dal menu *Risolvi* scegliamo *Sistema* e seguiamo il procedimento visto prima. Nella finestra di *Derive* compaiono le soluzioni del sistema (**FIGURA 5**). Anche in questo caso le soluzioni $(0\,;5)$ e $(5\,;0)$ presentano una «simmetria».

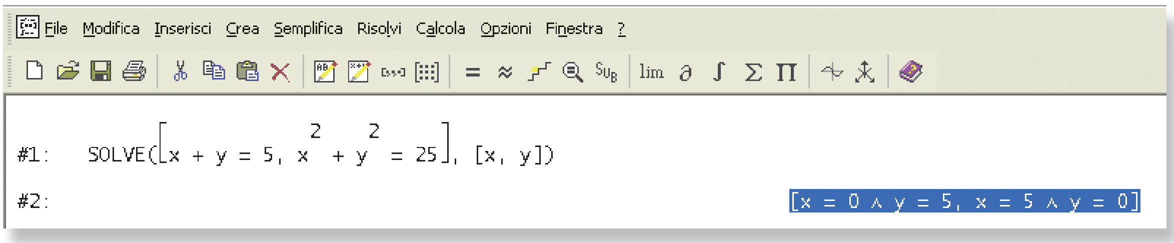

FIGURA 5

Usiamo ora le capacità grafiche di *Derive* per studiare il sistema 2.

Nella finestra di algebra selezioniamo, nell'espressione **#1**, la prima equazione facendo clic su di essa fino a quando appare evidenziata solo l'espressione `x+y=5`. Attiviamo la finestra grafica e selezioniamo il pulsante . Nella finestra grafica viene tracciata la retta di equazione $x + y = 5$. Ripetiamo il procedimento per rappresentare la seconda equazione: nella finestra grafica viene tracciata una circonferenza che ha centro nell'origine e raggio 5. La **FIGURA 6**, dove abbiamo tracciato anche la bisettrice del primo e terzo quadrante, mostra il risultato. Anche in questo caso entrambi i grafici sono *simmetrici* rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Le soluzioni del sistema corrispondono alle coordinate dei punti di intersezione tra la retta e la circonferenza. Anche le due intersezioni sono simmetriche rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

PER APPROFONDIRE

In generale un'equazione della forma $x^2 + y^2 = r^2$ è l'equazione di una circonferenza che nel piano cartesiano ha centro nell'origine e raggio r.
Nell'equazione in esame il secondo membro è 25, quindi $r^2 = 25 \longrightarrow r = 5$.

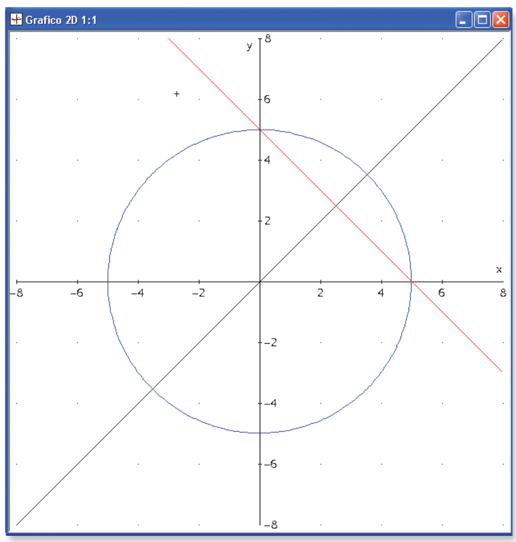

FIGURA 6