

MATEMATICA IN LABORATORIO

Fare matematica con GeoGebra

- L'ambiente di lavoro
- Usare GeoGebra per studiare la geometria nel piano
- Comprendere GeoGebra
- Usare GeoGebra per tracciare grafici di funzioni

L'ambiente di lavoro

1 Che cosa è GeoGebra

GeoGebra è un software libero e *Open Source*, ideato nel 2001 da Markus Hohenwarter, prima presso l'università di Salisburgo e poi presso la *Florida State University*.

GeoGebra è un software didattico di matematica dinamica, che comprende geometria piana, algebra e analisi matematica.

GeoGebra permette di costruire figure geometriche in cui le relazioni tra gli elementi sono definite dall'utente; tali figure possono poi essere deformate continuando a mantenere inalterate le relazioni definite al momento della costruzione.

Inoltre è possibile inserire direttamente le equazioni di un luogo geometrico e le coordinate di un punto, gestire contemporaneamente variabili numeriche, vettori e punti, calcolare derivate e integrali di funzioni.

Qui però tratteremo soprattutto le funzionalità legate alla geometria; vedremo poi come usare *GeoGebra* per tracciare luoghi geometrici e grafici di funzioni a partire dalle rispettive equazioni.

Le costruzioni possibili con *GeoGebra* sono sostanzialmente le stesse consentite dalla geometria euclidea e molti strumenti di costruzione che *GeoGebra* ci mette a disposizione corrispondono agli assiomi di Euclide.

GeoGebra è perciò un potente strumento, utile sia per la scoperta delle proprietà delle figure geometriche sia per la verifica delle proprietà studiate nel corso teorico.

Come alternative a *GeoGebra* si possono usare i programmi **DrGeo**, anch'esso software libero e *Open Source*, e **Cabri**, quest'ultimo a pagamento, che implementano le stesse funzioni di *GeoGebra* con un'interfaccia molto simile.

Lo scopo di questa appendice è introdurre lo studente all'uso di *GeoGebra*; non ne illustreremo perciò tutte le funzioni e i comandi: chi volesse approfondirli potrà consultare l'*Introduzione a GeoGebra* e il *Manuale ufficiale di GeoGebra*, entrambi scaricabili dal sito www.GeoGebra.org. Cercheremo piuttosto di "rompere il ghiaccio", eseguendo una costruzione che ci guiderà a scoprire questo pro-

gramma. Ulteriori approfondimenti sono illustrati, quando necessario, in ciascuna delle esercitazioni di laboratorio.

2 L'ambiente GeoGebra

L'ambiente di lavoro di *GeoGebra* è illustrato nella FIGURA 1 in cui possiamo distinguere gli elementi seguenti.

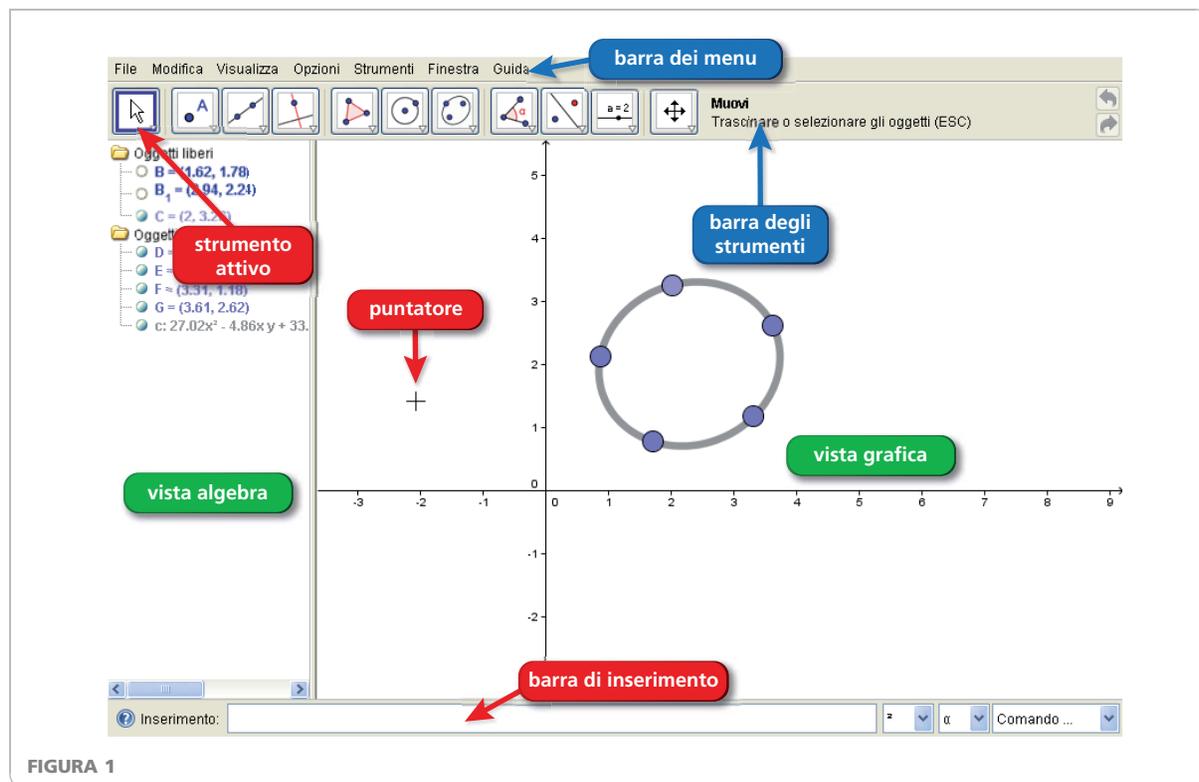
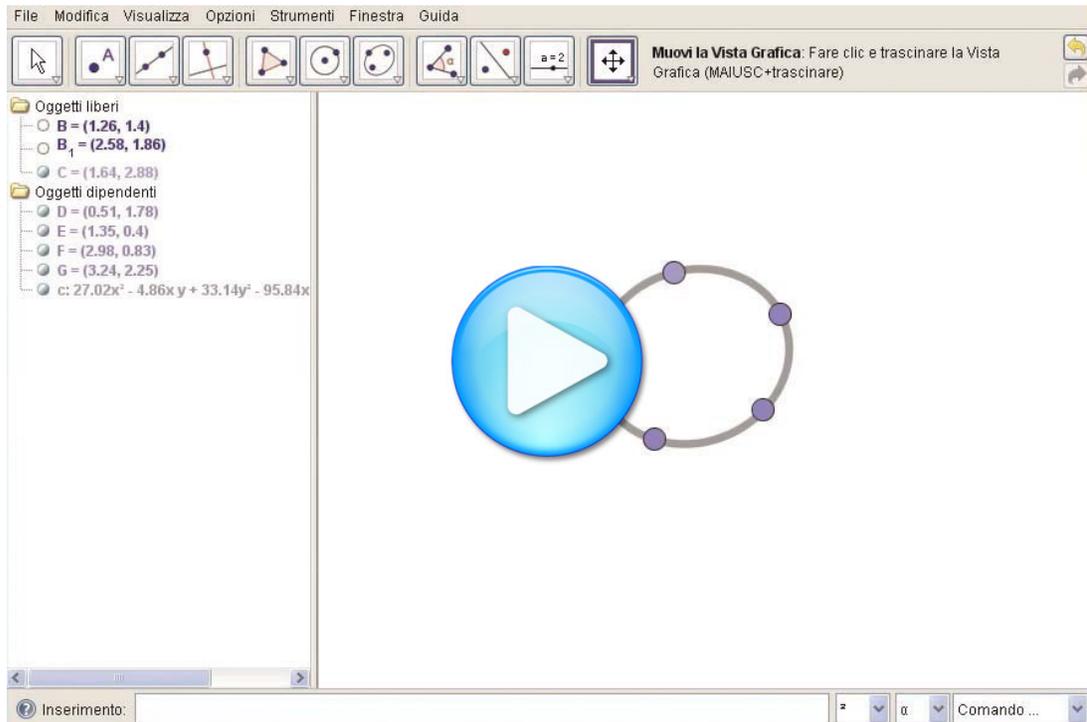


FIGURA 1

- **Barra dei menu:** in essa sono raggruppati i comandi disponibili, tra cui anche i comuni comandi che appaiono in quasi tutti i programmi più diffusi: *Apri*, *Salva*, *Taglia*, *Copia*, *Incolla*...
- **Barra degli strumenti:** in essa compaiono i pulsanti corrispondenti agli strumenti di disegno.
- **Strumento attivo:** è il pulsante che nella barra degli strumenti è evidenziato; esso rappresenta lo strumento di disegno che stiamo utilizzando.
- **Puntatore:** si sposta muovendo il mouse e indica la posizione in cui stiamo operando.
- **Vista grafica:** è la porzione della finestra di *GeoGebra* in cui compaiono le figure geometriche.
- **Barra di inserimento:** è utilizzata per inserire espressioni algebriche in *GeoGebra*.
- **Vista Algebra:** in essa compaiono le espressioni algebriche che sono state inserite. Gli *Oggetti liberi* sono quelli creati senza utilizzare un oggetto già esistente; gli *Oggetti dipendenti* sono quelli che sono stati creati a partire da altri oggetti. Quando non occorre la *Vista Algebra*, è possibile chiuderla cliccando sulla "X" in alto a destra. Potremo poi riaprirla scegliendo la relativa voce del menu *Visualizza*.
- **Vista foglio di calcolo:** in questa modalità (attivabile scegliendo, dal menu *Visualizza*, la voce *Vista Foglio di calcolo*), *GeoGebra* può essere utilizzato appunto come foglio di calcolo; è possibile immettere nelle celle qualsiasi oggetto supportato da *GeoGebra*. Nel seguito di questa trattazione non approfondiremo le funzionalità di foglio di calcolo messe a disposizione da *GeoGebra*.

L'ambiente di lavoro è mostrato anche nell'**ANIMAZIONE 1**.



3 La barra degli strumenti

La **barra degli strumenti** è particolarmente importante per l'uso di *GeoGebra*. Facendo *clic* su un pulsante di essa si seleziona lo strumento corrispondente; il pulsante viene evidenziato e a destra della barra degli strumenti compare il nome dello strumento attivo insieme a una sua breve descrizione. Il nome "strumento" deriva dal fatto che facendo *clic* su uno di questi pulsanti, il mouse viene trasformato in uno strumento di disegno specializzato; ad esempio, lo strumento *Retta per due punti* consente di disegnare rette che passano per due punti già esistenti o definiti al momento di creare la retta, lo strumento *Circonferenza di dato centro* consente di disegnare circonferenze scegliendo il centro della circonferenza e un suo punto. Altri strumenti consentono di spostare gli oggetti, di cambiare il loro aspetto, di attribuirvi dei nomi, ecc.

È importante osservare una particolarità che contraddistingue la barra degli strumenti di *GeoGebra* rispetto a quelle dei più comuni programmi. Si può notare, nell'angolo inferiore destro di ogni pulsante, un triangolino, che diventa rosso spostando il puntatore su di esso. Cliccando sul triangolino si apre un menu (**FIGURA 2**); se si seleziona una voce da questo menu il pulsante cambia aspetto e funzione.

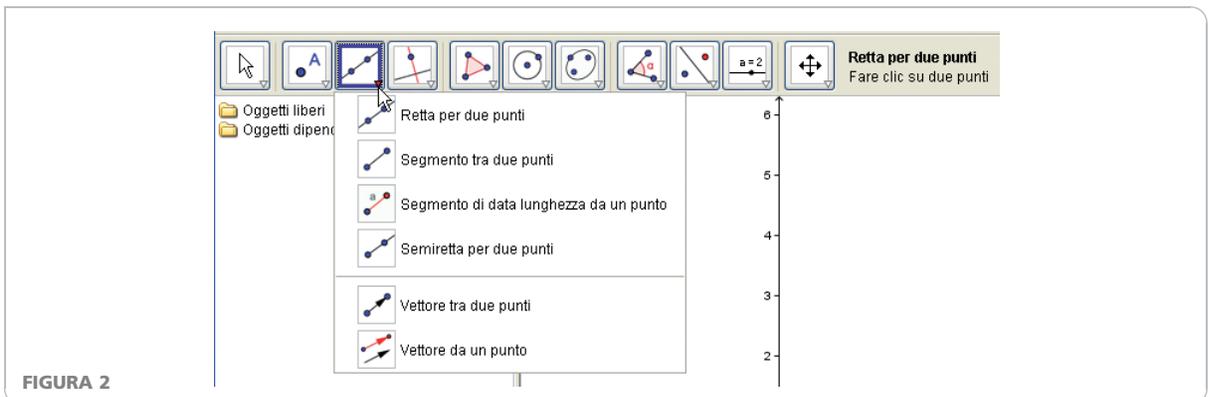


FIGURA 2

In **FIGURA 2** abbiamo aperto il menu del terzo pulsante da sinistra (d'ora in poi diremo semplicemente *menu del terzo pulsante*) e abbiamo quindi selezionato la voce *Segmento di data lunghezza da un punto*. In **FIGURA 3** puoi osservare come il pulsante abbia cambiato aspetto.

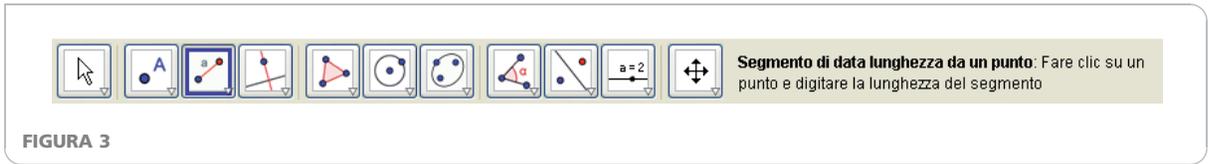
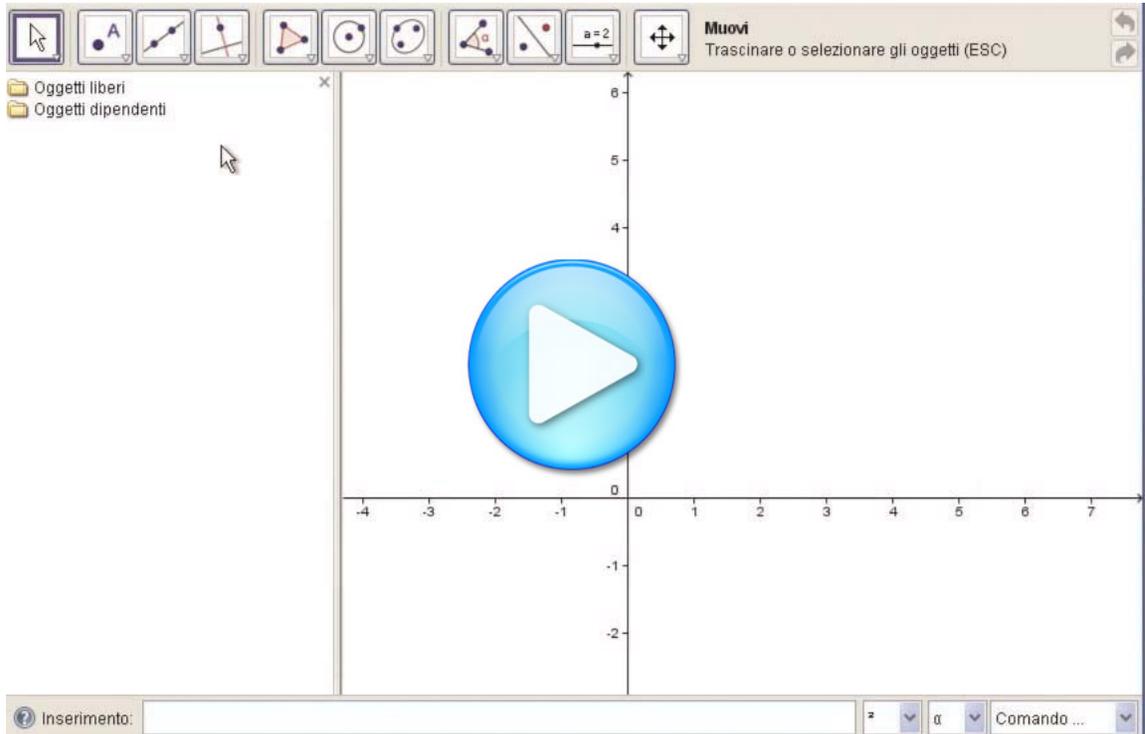


FIGURA 3

Nell'**ANIMAZIONE 2** puoi osservare le procedure appena descritte



Il terzo pulsante, che prima corrispondeva allo strumento *Retta per due punti*, denotato dall'icona , ora è associato allo strumento *Segmento di data lunghezza da un punto*, denotato dall'icona . Gli strumenti sono raggruppati nei vari menu in base alla loro funzione. Procedendo da sinistra verso destra troviamo i menu illustrati nelle **FIGURE 4-14**.



FIGURA 4

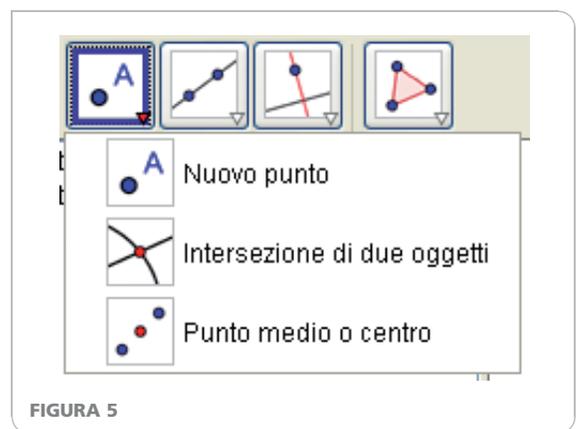
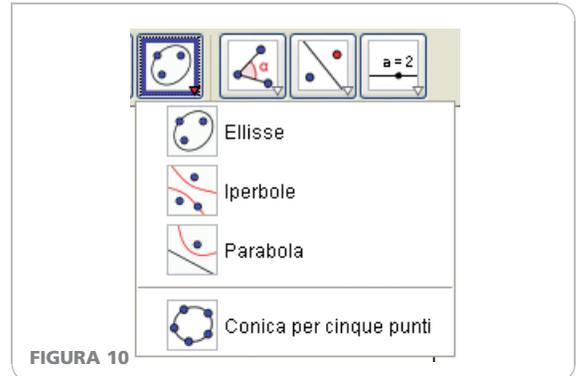
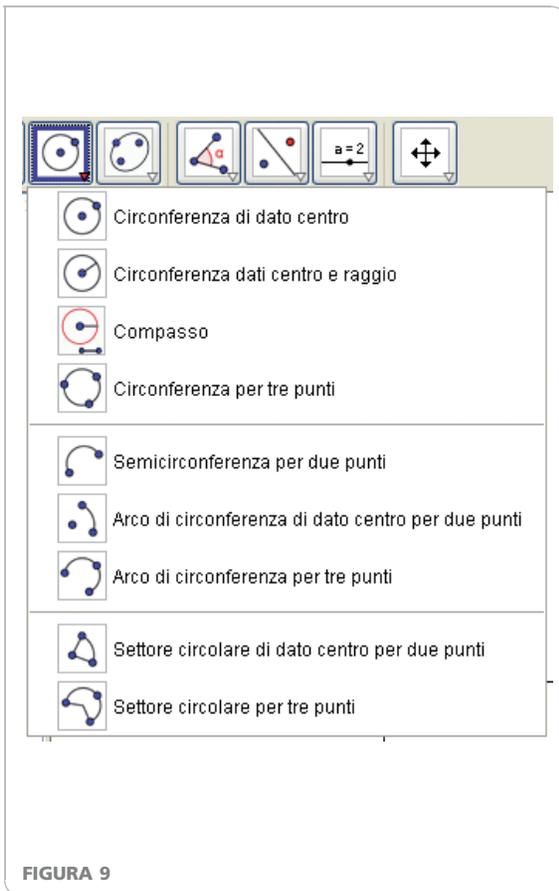
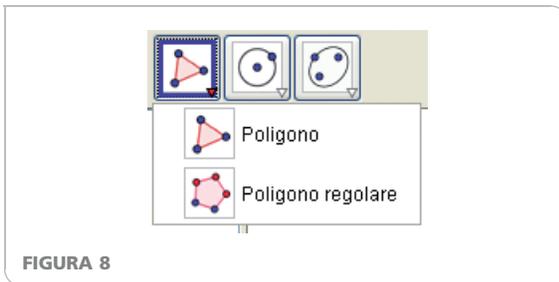
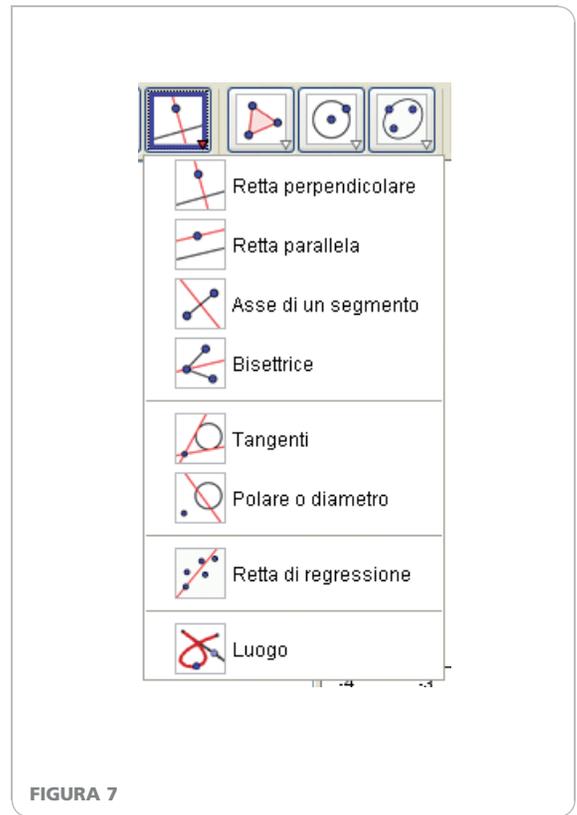
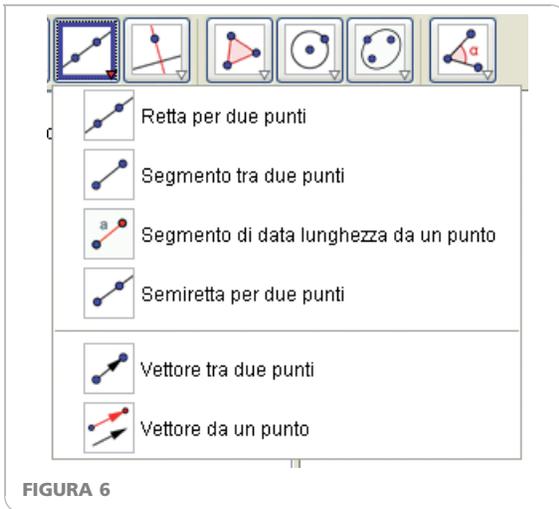


FIGURA 5



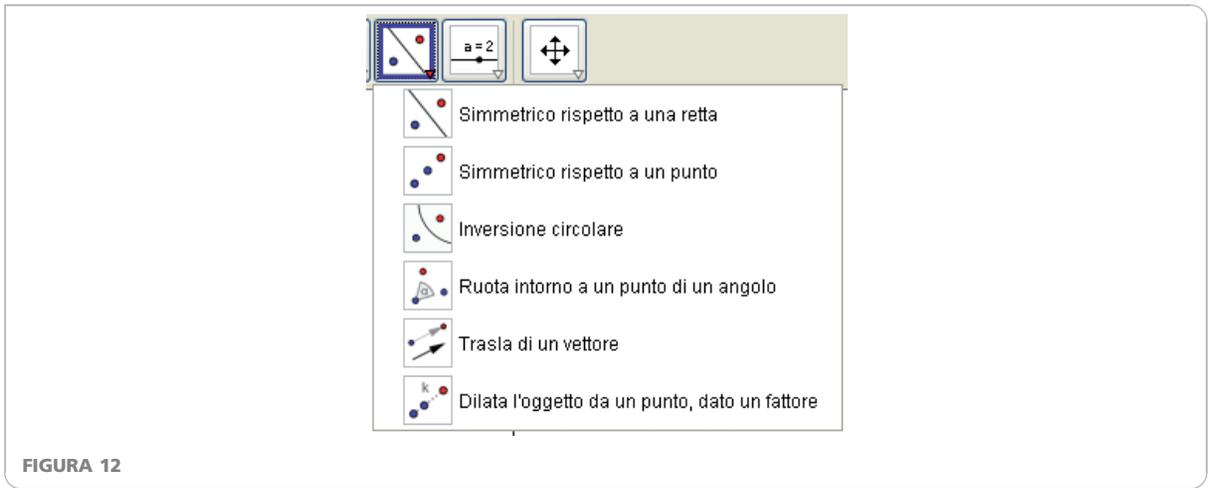


FIGURA 12

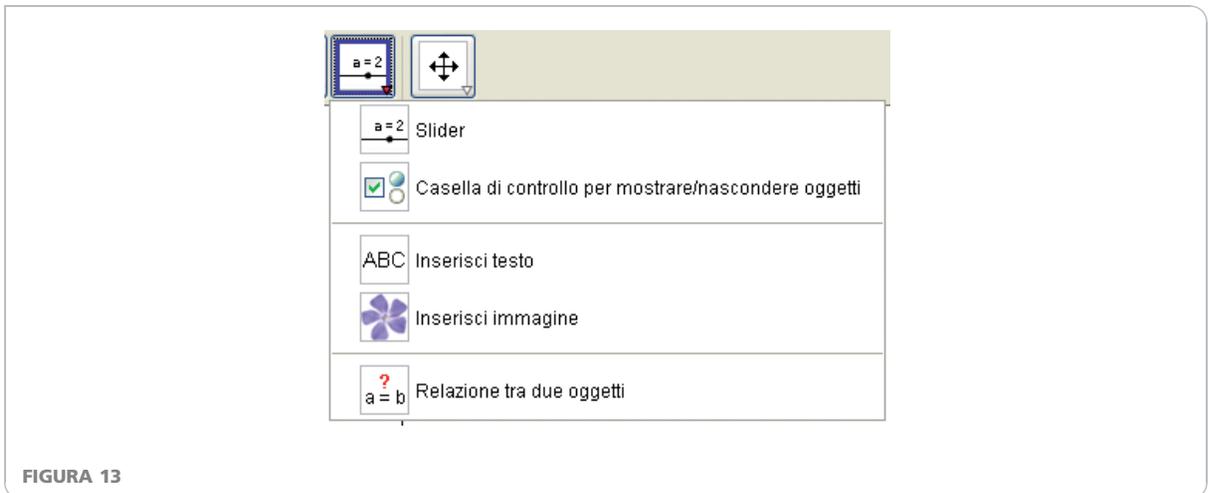


FIGURA 13

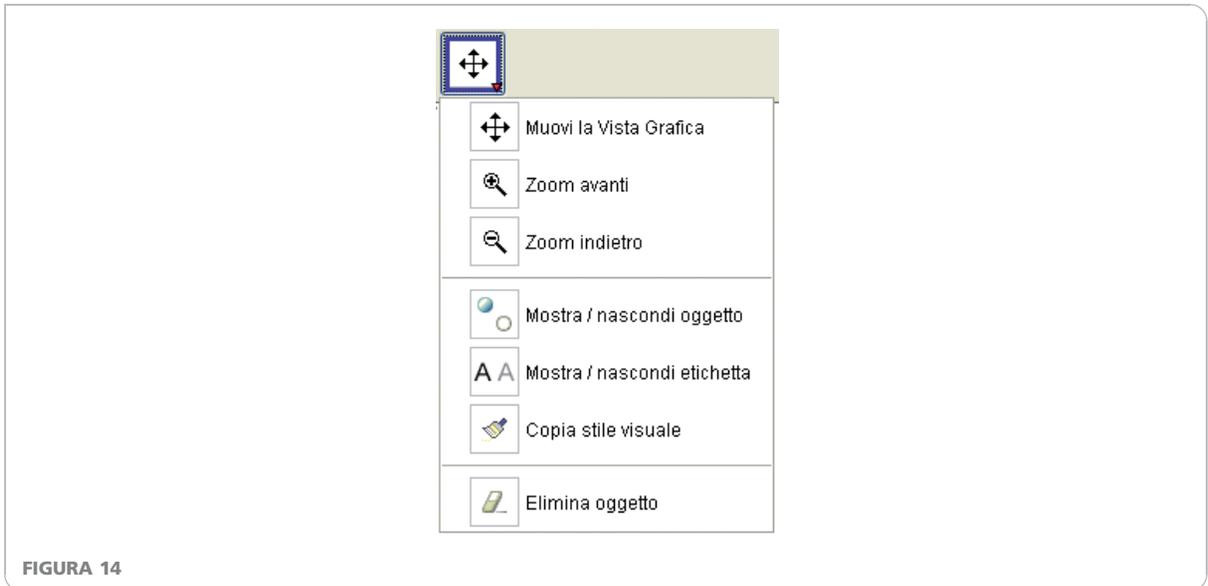
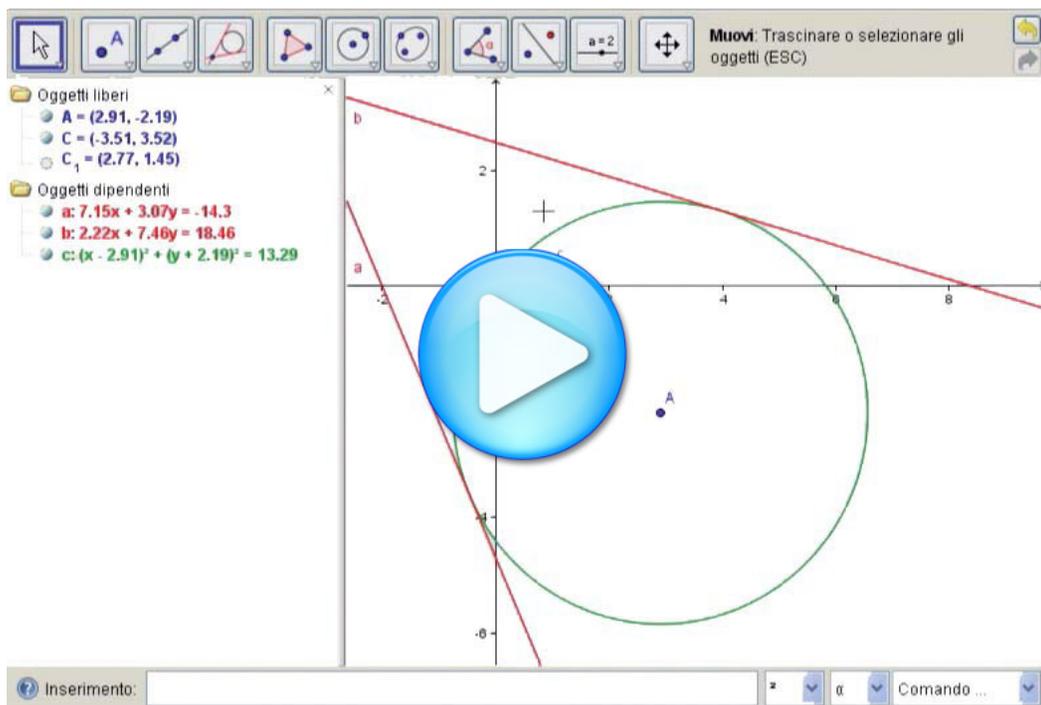
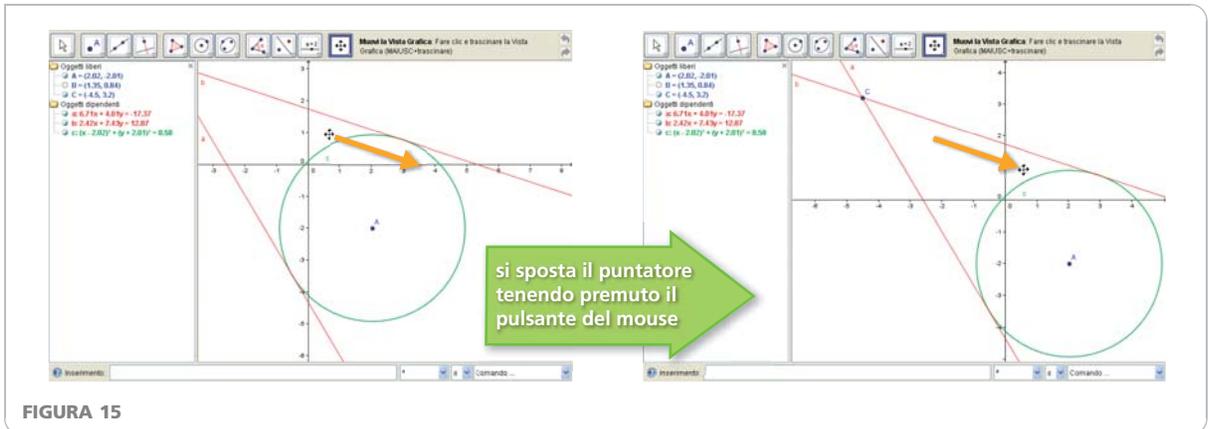


FIGURA 14

Dato l'elevato numero di strumenti di *GeoGebra*, prenderemo in considerazione solo i più importanti via via che lo richiederà la trattazione.

4 Lo strumento Muovi la Vista Grafica

Il piano euclideo è illimitato, mentre la finestra di *GeoGebra* è limitata e dunque può mostrare solo una porzione del piano; perciò può accadere che qualche elemento del disegno venga a trovarsi al di fuori della finestra di *GeoGebra*. Mediante lo strumento *Muovi la Vista Grafica*, denotato dall'icona , è possibile fare “scorrere” il piano in modo che la finestra di *GeoGebra* ne inquadri una porzione differente. È sufficiente cliccare sul pulsante, spostare il puntatore all'interno della *Vista Grafica*, ma non vicino a uno degli assi, premere il tasto sinistro del mouse e, mantenendolo premuto (il puntatore assume la forma di croce con quattro frecce, come puoi vedere in **FIGURA 15** e nell'**ANIMAZIONE 3**), spostare il puntatore.



5 Personalizzare la Vista Grafica

GeoGebra mette a disposizione diverse opzioni per personalizzare la *Vista Grafica*.

Il modo più veloce per accedere a queste opzioni è cliccare con il pulsante destro del mouse su una zona vuota della *Vista Grafica*; si apre il menu in **FIGURA 16**.



FIGURA 16

Di seguito sono descritte brevemente le principali voci di tale menu.

- *Assi* e *Griglia* servono per mostrare o nascondere gli assi cartesiani (che per impostazione predefinita vengono mostrati) e una griglia a quadretti che “simula” un foglio di quaderno (tale griglia per impostazione predefinita non viene mostrata).
- *Zoom* consente di ingrandire o ridurre la porzione del piano rappresentata nella *Vista Grafica*. Lo stesso scopo può essere ottenuto con la rotella del mouse. È possibile anche selezionare l'area da ingrandire a pieno schermo: basta posizionare il mouse in un vertice di tale area, premere il tasto destro del mouse e, mantenendolo premuto, trascinare il puntatore per “tracciare” il rettangolo di zoom.
- *Vista grafica...* apre una finestra di dialogo che consente di modificare le proprietà degli assi e della griglia.

Usare GeoGebra per studiare la geometria nel piano

6 La prima costruzione

Allo scopo di illustrare il funzionamento di *GeoGebra* eseguiremo ora una semplice costruzione geometrica. Ci proponiamo di **disegnare un quadrato inscritto in una circonferenza data**, perciò disegneremo dapprima una circonferenza e poi un quadrato i cui vertici si dovranno trovare sulla circonferenza stessa.

Le costruzioni geometriche con *GeoGebra* non sono molto diverse dalle costruzioni che si possono eseguire su un foglio di carta utilizzando riga e compasso. Per questo motivo, spesso il modo migliore per eseguire una costruzione con *GeoGebra* è pensare a come si dovrebbe operare con riga e compasso e quindi riprodurre gli stessi passaggi con *GeoGebra*.

Prima di iniziare a tracciare gli oggetti che fanno parte della costruzione, nascondiamo gli assi: clicchiamo con il tasto destro su una zona vuota della *Vista Grafica* e togliamo il “segno di spunta” dalla voce *Assi* (**FIGURA 16**).

Tracciamo ora una circonferenza (FIGURA 17 e ANIMAZIONE 4).

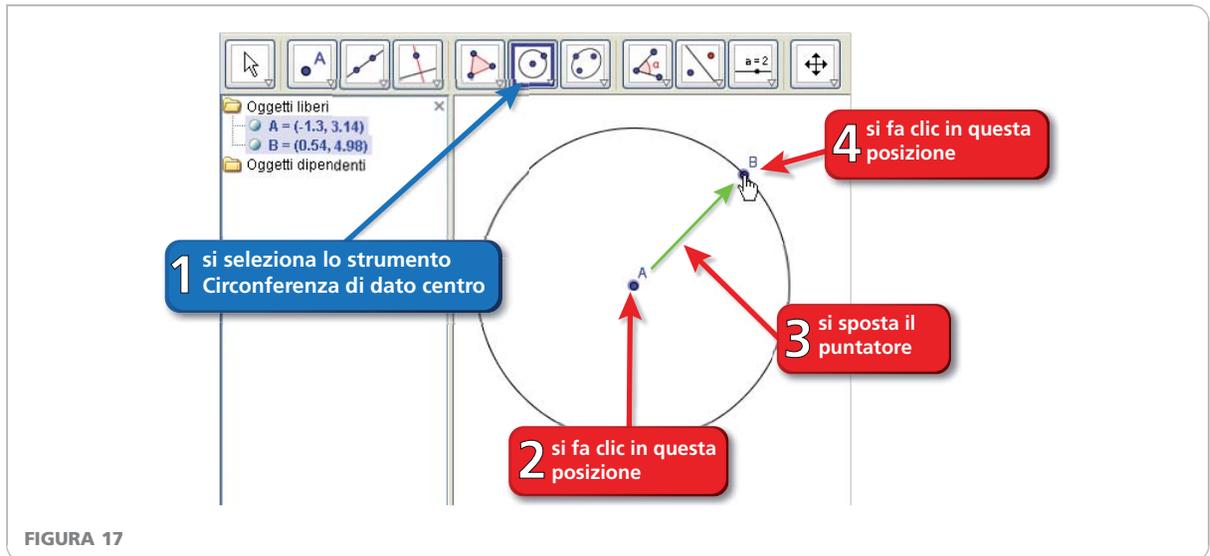
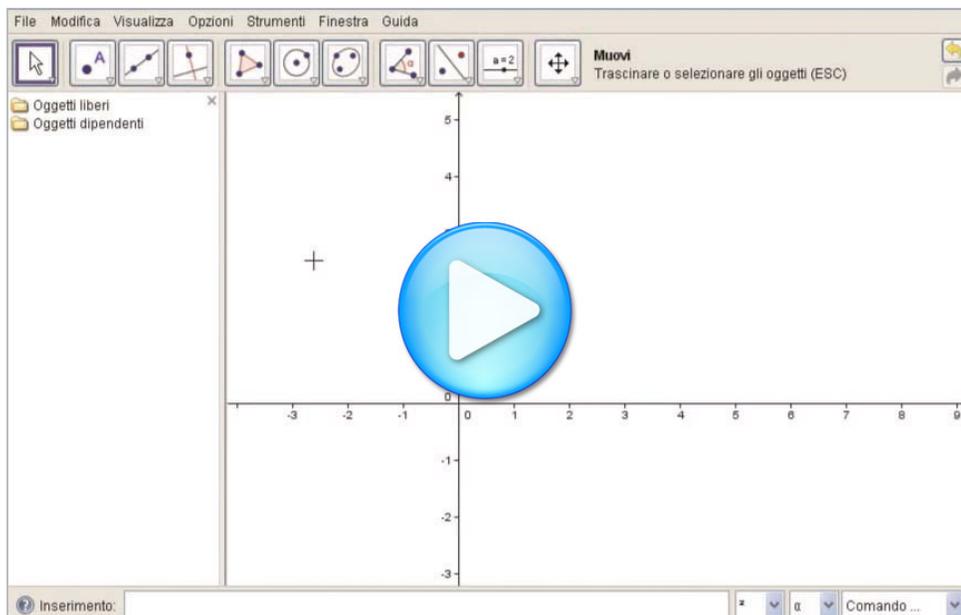


FIGURA 17

1. Selezioniamo lo strumento *Circonferenza di dato centro* facendo *click* sul pulsante denotato dall'icona ; tale pulsante, all'avvio di *GeoGebra*, è il sesto da sinistra della barra degli strumenti. Se il pulsante presente in quella posizione fosse diverso occorrerebbe selezionare lo strumento *Circonferenza di dato centro* dal corrispondente menu, come abbiamo illustrato nel PARAGRAFO 3.
2. Posizioniamo il puntatore del mouse all'interno della *Vista Grafica* (è più comodo posizionarlo approssimativamente al centro della finestra) e facciamo *click*. Appare un punto: il centro della circonferenza.
3. Spostando il mouse comincia ad apparire una piccola circonferenza che, allontanando il puntatore del mouse dal centro, diventa via via più grande.
4. Quando siamo soddisfatti della grandezza della circonferenza confermiamo con un *click*.



Notiamo che *GeoGebra* attribuisce automaticamente un nome a ciascun oggetto creato. Nell'esempio di FIGURA 17, i punti sono indicati con *A* e *B*, la circonferenza sarà indicata con *c*.

Osserviamo ora che il punto B , che è stato necessario per costruire la circonferenza, non ci è utile per la costruzione che vogliamo realizzare. Per ora limitiamoci a non utilizzarlo; vedremo tra breve che è possibile nascondere (senza eliminarlo).

Ora dobbiamo scegliere un punto della circonferenza, che sarà il primo vertice del quadrato (FIGURA 18 e ANIMAZIONE 5).

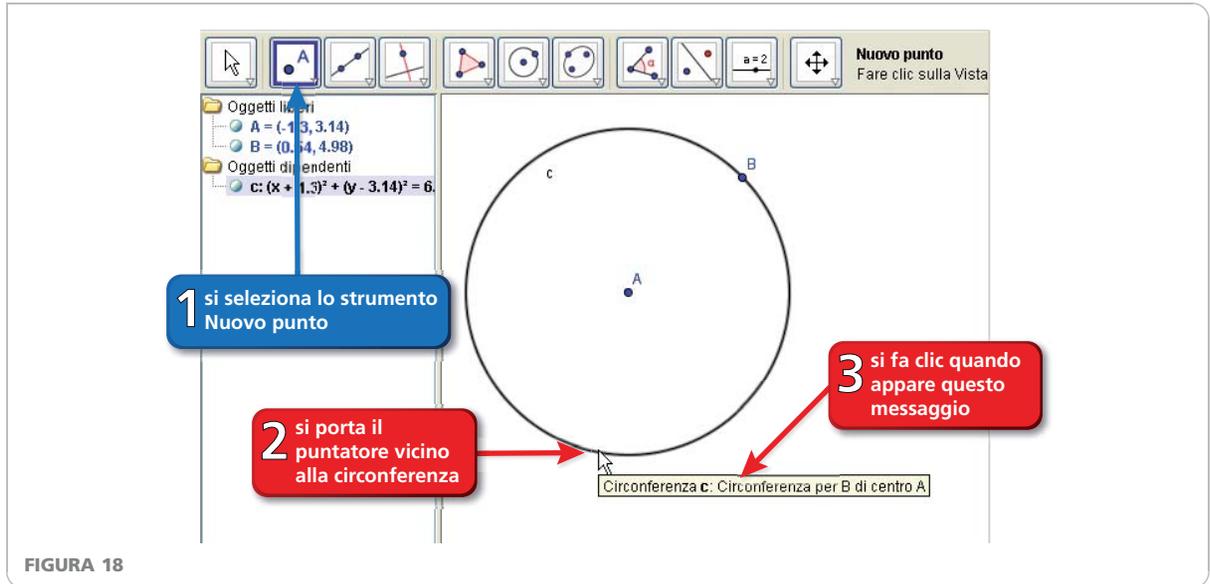
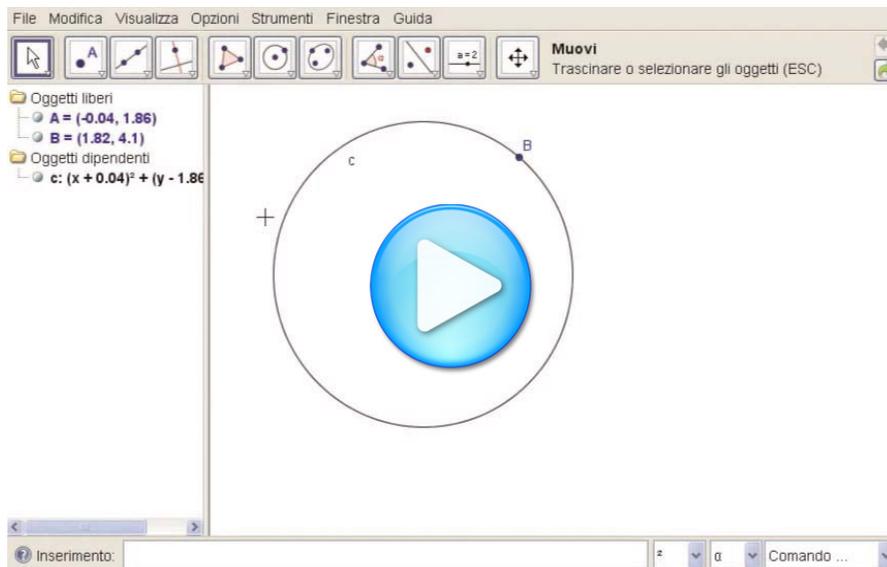


FIGURA 18

1. Selezioniamo lo strumento *Nuovo punto*, denotato dall'icona , che si trova nel menu del secondo pulsante.
2. Portiamo il puntatore vicino alla circonferenza.
3. Quando il puntatore è sufficientemente vicino alla circonferenza, essa appare evidenziata con un tratto più spesso e subito dopo compare il messaggio *Circonferenza c: Circonferenza per B di centro A*. Ora facciamo *click*. È molto importante ricordarsi di **fare click solo dopo che la circonferenza appare evidenziata con un tratto più spesso**. Solo in questo modo si può essere certi di creare un punto *appartenente* alla circonferenza e non semplicemente vicino a essa. Il punto creato sarà indicato con la lettera C .

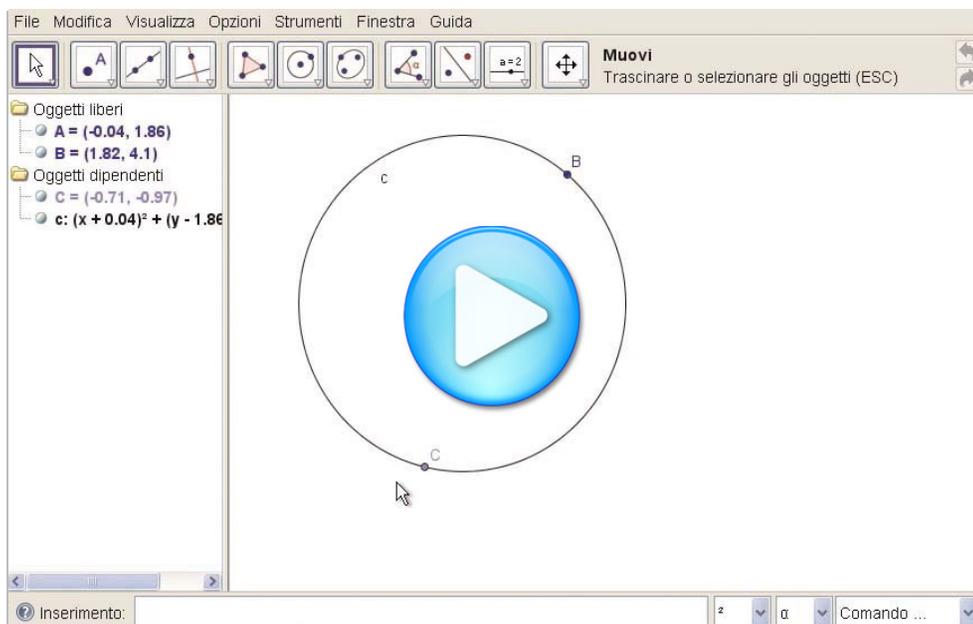


Costruiamo ora la prima diagonale. Dobbiamo tracciare una retta passante per il punto appena creato e per il centro della circonferenza (FIGURA 19 e ANIMAZIONE 6).



FIGURA 19

1. Per prima cosa selezioniamo lo strumento *Retta per due punti*, che si trova nel menu del terzo pulsante, ed è denotato dall'icona .
2. Portiamo poi il puntatore del mouse vicino al punto *C* della circonferenza;
3. quando il puntatore è sufficientemente vicino al punto, esso appare evidenziato e subito dopo compare il messaggio: *Punto C: Punto su c*. Dopo che il punto è apparso evidenziato, o dopo che sia comparso il messaggio, facciamo *click*.
4. Portiamo il puntatore verso il centro della circonferenza: comincia ad apparire una semiretta;
5. quando il puntatore è abbastanza vicino al centro, cioè al punto *A*, tale punto appare evidenziato e subito dopo compare il messaggio: *punto A*. Dopo che il centro è apparso evidenziato, o dopo che sia comparso il messaggio, facciamo *click*. Appare una retta che passa per *A* e per *B*; essa è indicata con *a*.

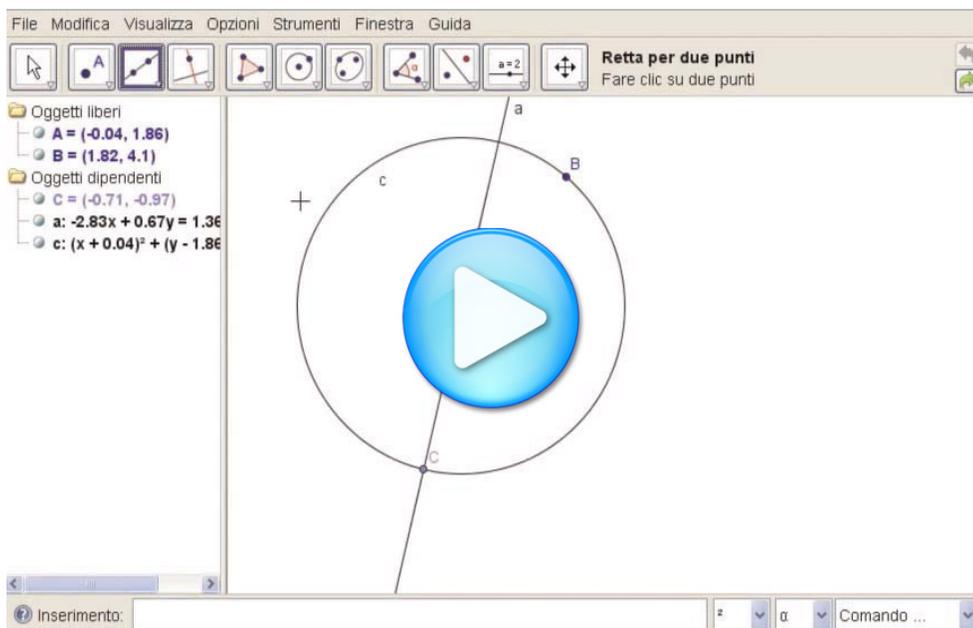


In questo modo abbiamo costruito una retta specificando due punti per cui essa deve passare. Questa retta sarà la prima diagonale del nostro quadrato. Dobbiamo ora costruire la seconda diagonale del quadrato, che deve essere perpendicolare alla prima e deve passare per il centro della circonferenza (FIGURA 20 e ANIMAZIONE 7).



FIGURA 20

1. Per prima cosa selezioniamo lo strumento *Retta perpendicolare*, che si trova nel menu del quarto pulsante ed è denotato dall'icona .
2. Portiamo il puntatore verso il centro della circonferenza;
3. quando il puntatore è abbastanza vicino al centro, esso assume nuovamente la forma di una freccia, il centro appare evidenziato e compare il messaggio: *Punto A*. Facciamo *click* per indicare il punto per cui dovrà passare la perpendicolare.
4. Portiamo poi il puntatore del mouse vicino alla retta;
5. quando la retta appare evidenziata con un tratto più spesso, o dopo che è comparso il messaggio *Retta a: Retta per C e A*, facciamo *click*: viene disegnata la perpendicolare.



I vertici del quadrato sono le intersezioni delle due rette con la circonferenza.

Per individuare con *GeoGebra* questi quattro punti, utilizziamo lo strumento *Intersezione di due oggetti*, denotato dall'icona , che si trova nel menu del secondo pulsante.

Utilizzando lo stesso metodo di selezione degli oggetti visto prima, clicchiamo sulla circonferenza e poi sulla retta *a*: restano così individuati i punti *D* ed *E* (FIGURA 21 e ANIMAZIONE 8); clicchiamo nuovamente sulla circonferenza e poi sulla retta *b*: restando individuati i punti *F* e *G*. Osserviamo che il punto *C* non è più visualizzato, perché a esso ora è sovrapposto il punto *D*. Tuttavia il punto *C* compare ancora nella *Vista Algebra*, perché tale oggetto non è stato eliminato.

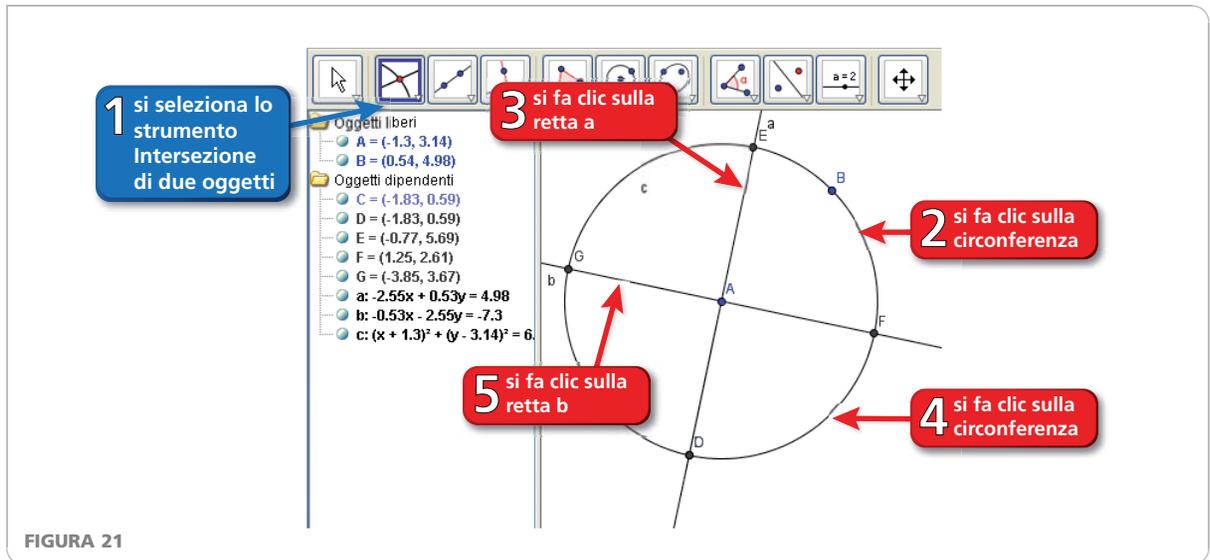
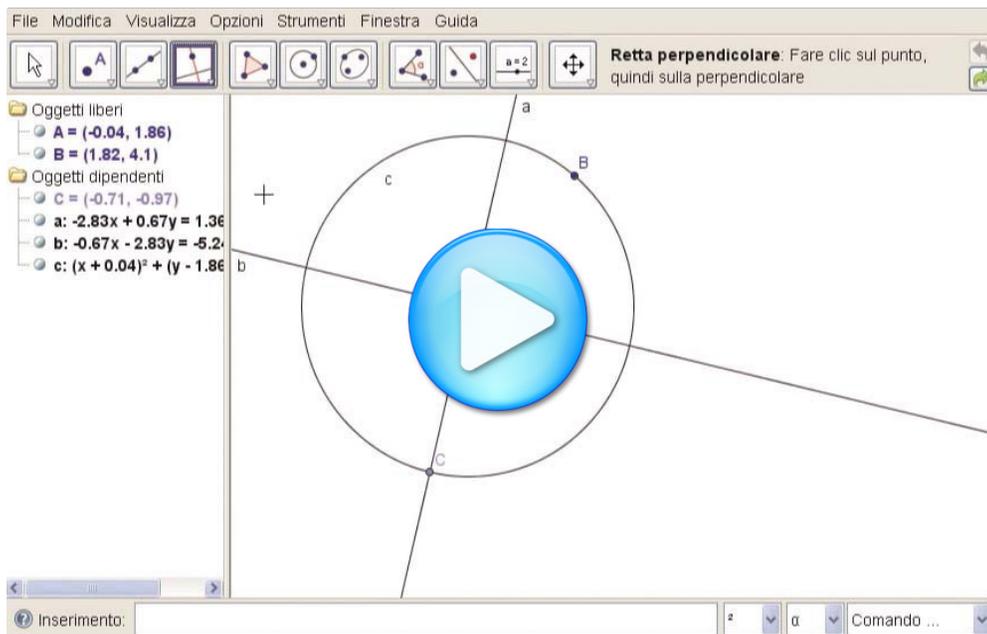
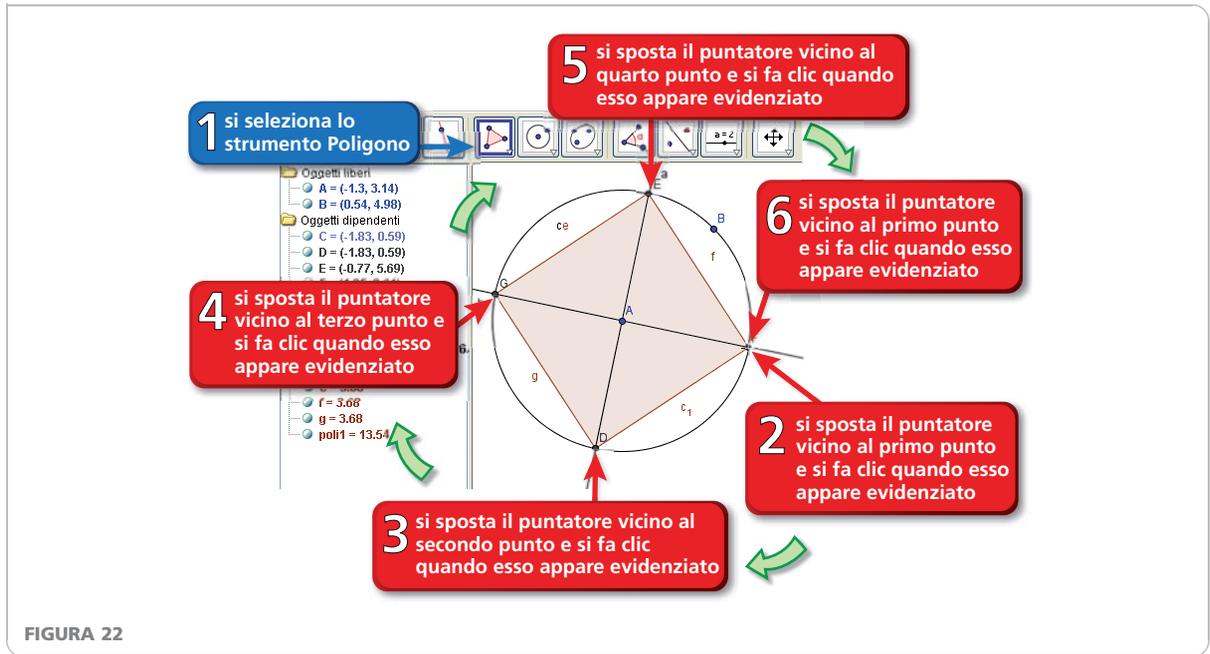


FIGURA 21



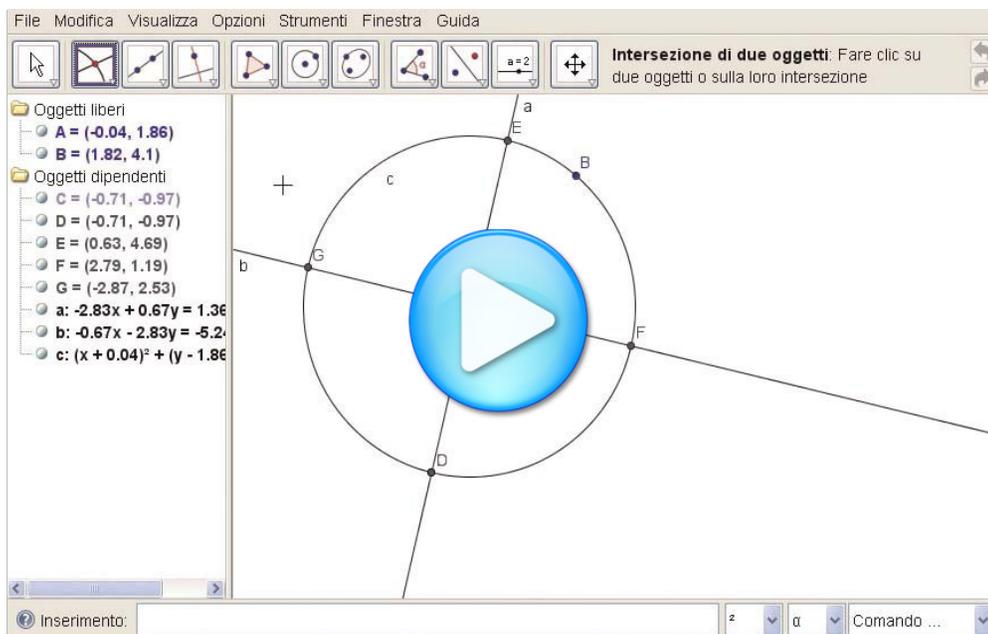
Per tracciare il quadrato è sufficiente selezionare lo strumento Poligono, denotato dall'icona , che si trova nel menu del quinto pulsante, e quindi unire i vertici (FIGURA 22 e ANIMAZIONE 9).



Posizioniamo il puntatore vicino al primo dei vertici che vogliamo unire, per esempio al punto F , e facciamo *click* quando tale punto appare evidenziato o quando appare il corrispondente messaggio. Spostiamo ora il puntatore verso il secondo vertice, per esempio il punto E . Vediamo che il puntatore assume la forma di una croce ed inizia a “formarsi” il primo lato.

Procediamo in modo analogo cliccando successivamente sui punti G e D , infine “chiudiamo” il poligono cliccando nuovamente sul punto F .

Notiamo che *GeoGebra* assegna un nome a ciascuno dei lati, in questo caso essi sono contrassegnati con le lettere f, e, g, c_1 .



7 Nascondere e cancellare oggetti

Il nostro scopo era quello di disegnare un quadrato inscritto in una data circonferenza. Nel disegno che abbiamo realizzato compaiono anche le rette diagonali del quadrato, necessarie alla costruzione, e il punto B , che ci era servito per tracciare la circonferenza. Possiamo però nascondere tali elementi. Per farlo si potrebbe agire direttamente nella *Vista Grafica*, ma è più comodo utilizzare la *Vista Algebra*. Cominciamo a nascondere la retta a : clicchiamo sul cerchietto celeste che, nella *Vista Algebra*, compare a sinistra della definizione della retta a . Questa azione ha due conseguenze:

- nella *Vista Algebra* continua a essere presente la definizione della retta a , ma il cerchietto al suo fianco diventa bianco;
- nella *Vista Grafica* la retta a scompare. Essa non è stata eliminata ma è diventata invisibile: la retta a e le relazioni tra essa e gli altri oggetti del disegno continuano a esistere.

Procediamo allo stesso modo anche per la retta b e per il punto B . Nascondiamo anche il punto D . Osserviamo che gli oggetti nascosti non sono più visibili nella *Vista Grafica* e che nella *Vista Algebra* le voci corrispondenti sono ora precedute da un cerchietto vuoto (FIGURA 23 e ANIMAZIONE 10).

È importante tenere presente che gli oggetti nascosti non sono stati eliminati: essi continuano a esistere e a “fare la loro parte” nella costruzione, anche se non si vedono. Per rendere di nuovo visibile un elemento nascosto è sufficiente fare *clic*, nella *Vista Algebra*, sul cerchietto bianco che compare alla sua sinistra: il cerchietto diventa celeste e l'elemento nascosto ricompare nella *Vista Grafica*.

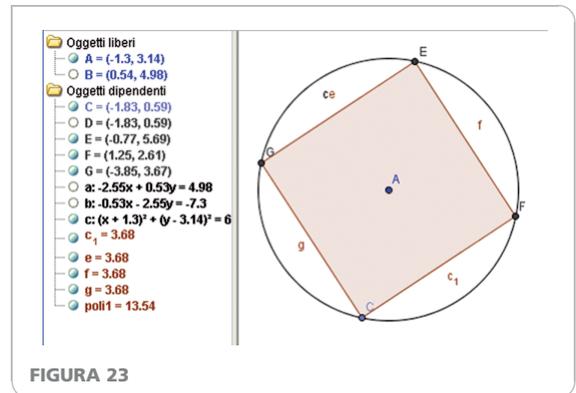
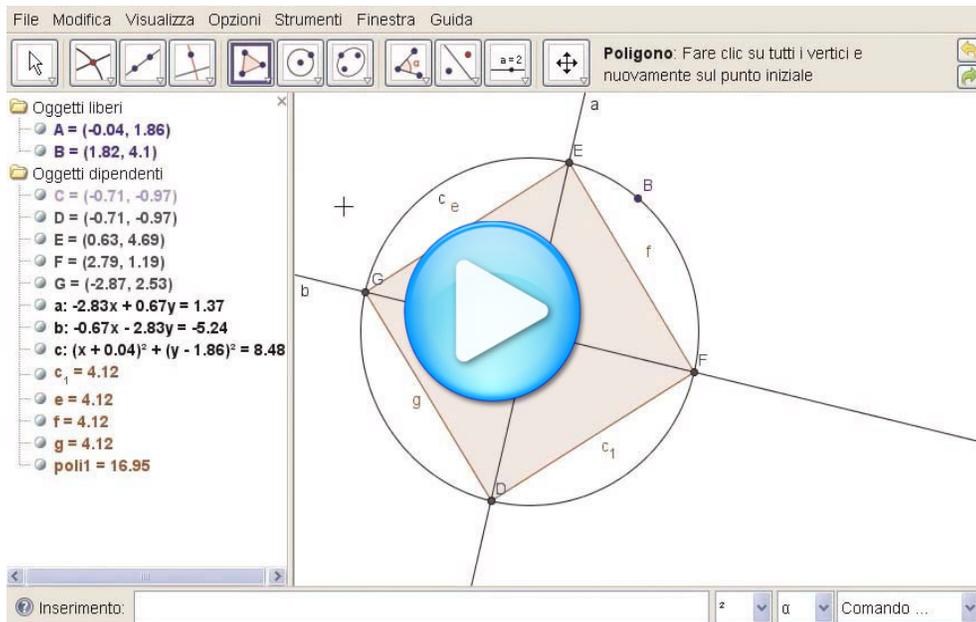


FIGURA 23



Per eliminare un oggetto invece, dopo aver fatto clic destro sulla corrispondente voce della *Vista Algebra* si deve scegliere *Elimina* nel menu che appare. In questo modo verranno eliminati anche tutti gli oggetti la cui costruzione dipende da esso. Per esempio, se nella costruzione appena realizzata si eliminasse la retta b , scomparirebbero anche i punti F e G e con essi il quadrato.

OPPURE

In *GeoGebra* alcune operazioni si possono eseguire in modi diversi.

Per esempio, per nascondere un oggetto si può fare *click* con il pulsante destro del mouse sull'oggetto (nella *Vista Grafica*) o sulla sua definizione (nella *Vista Algebra*). In entrambi i casi compare un menu in cui è presente la voce *Mostra oggetto* (FIGURA 24): facendo *click* su di essa possiamo far apparire o scomparire il segno di spunta e conseguentemente mostrare o nascondere l'oggetto.

Si può anche scegliere, dal menu dell'ultimo pulsante a destra, lo strumento *Mostra/nascondi oggetto*, denotato dall'icona . In questo modo nella *Vista Grafica* gli oggetti nascosti divengono temporaneamente visibili;

facendo *click* con questo strumento su un oggetto nascosto questo diventa visibile e viceversa. Quando si seleziona un altro strumento gli oggetti nascosti tornano a essere invisibili.

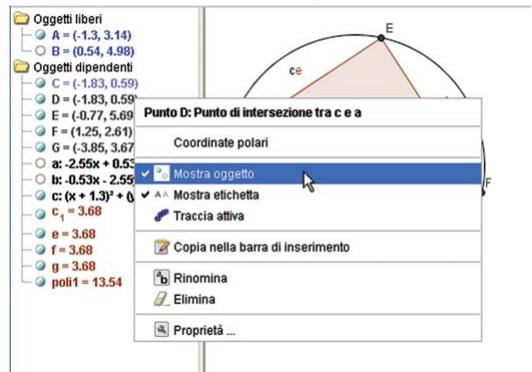


FIGURA 24

8 Modificare i nomi degli oggetti

In geometria spesso si usa assegnare dei nomi a punti, rette, angoli e altri oggetti che compaiono nei disegni, scrivendo ciascun nome, spesso consistente di una sola lettera, accanto all'oggetto designato; questi nomi, in *GeoGebra*, sono detti *etichette*. *GeoGebra* assegna automaticamente un'etichetta a ciascun oggetto creato; tali nomi però possono essere modificati o nascosti. Completiamo perciò la nostra costruzione indicando i vertici del quadrato con le lettere *A, B, C, D* e il suo centro con la lettera *O*, nascondendo inoltre i nomi di tutti gli altri oggetti visualizzati.

Iniziamo a nascondere i nomi che non ci interessano. Cominciamo dalla circonferenza *c*: clicchiamo, con il pulsante destro, sulla circonferenza (nella *Vista Grafica*) o sulla voce corrispondente (nella *Vista Algebra*) e nel menu che compare clicchiamo sulla voce *Mostra etichetta* per deseleggerla (FIGURA 25).

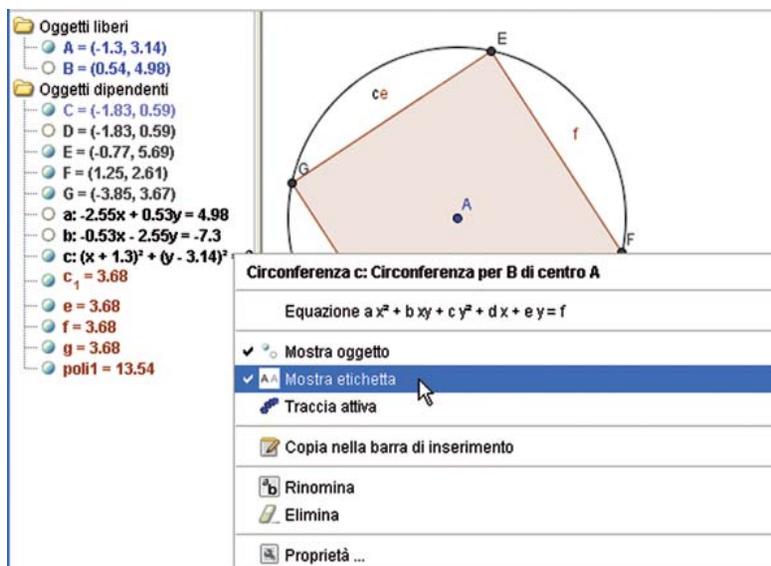


FIGURA 25

Procediamo in modo analogo per tutti gli altri oggetti, fino a lasciare solo il nome dei cinque che ci interessano (FIGURA 26 e ANIMAZIONE 11).

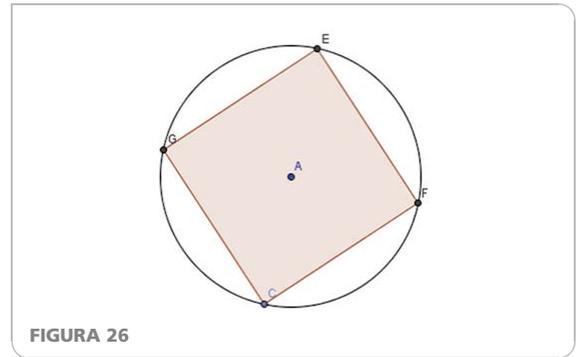
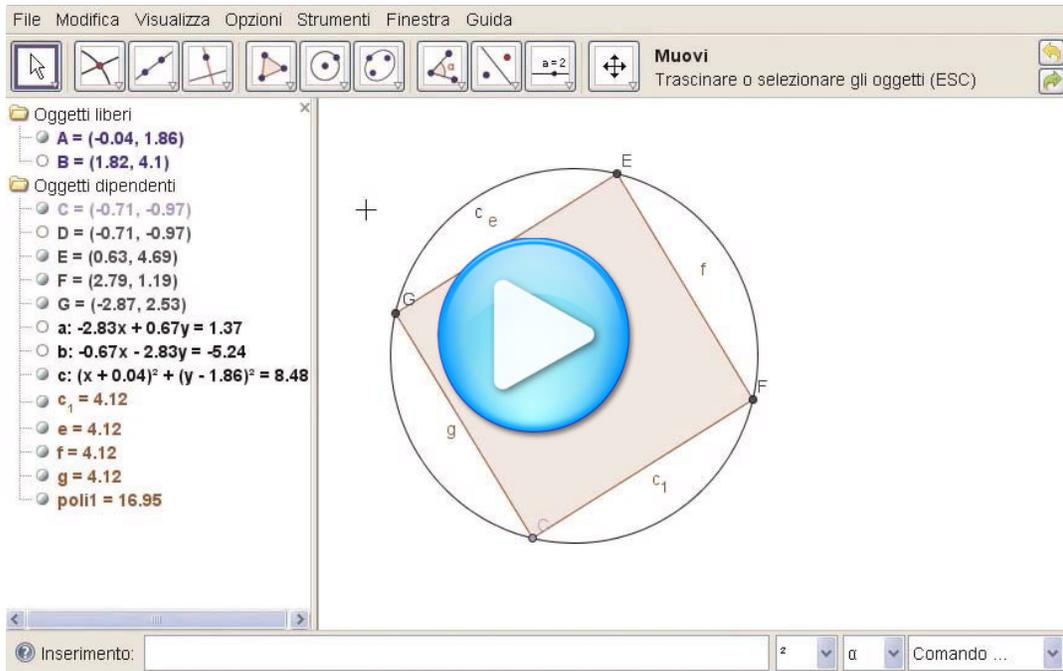


FIGURA 26



Rinominiamo ora i cinque punti, iniziando per esempio dal punto A. Clicchiamo, con il pulsante destro, sulla voce corrispondente nella *Vista Algebra* e nel menu che compare clicchiamo sulla voce *Proprietà*.

Si apre la finestra *Proprietà*, in FIGURA 27.



FIGURA 27

Nella casella *Nome* sostituiamo la lettera *O* al posto di *A*.

A questo punto potremmo cliccare su *Chiudi* e ripetere le operazioni descritte per gli altri punti, ma è possibile seguire una procedura più veloce. Lasciamo aperta la finestra *Proprietà*; nell'elenco *Punto*, che è nella parte sinistra della finestra, clicchiamo sulla voce corrispondente al punto *C*. Nella casella *Nome* sostituiamo ora la lettera *A* al posto di *C*. Procedendo in questo modo, rinominiamo i punti *F*, *E*, *G* rispettivamente con le lettere *B*, *C*, *D* e quindi chiudiamo la finestra.

Il risultato è mostrato in **FIGURA 28**.

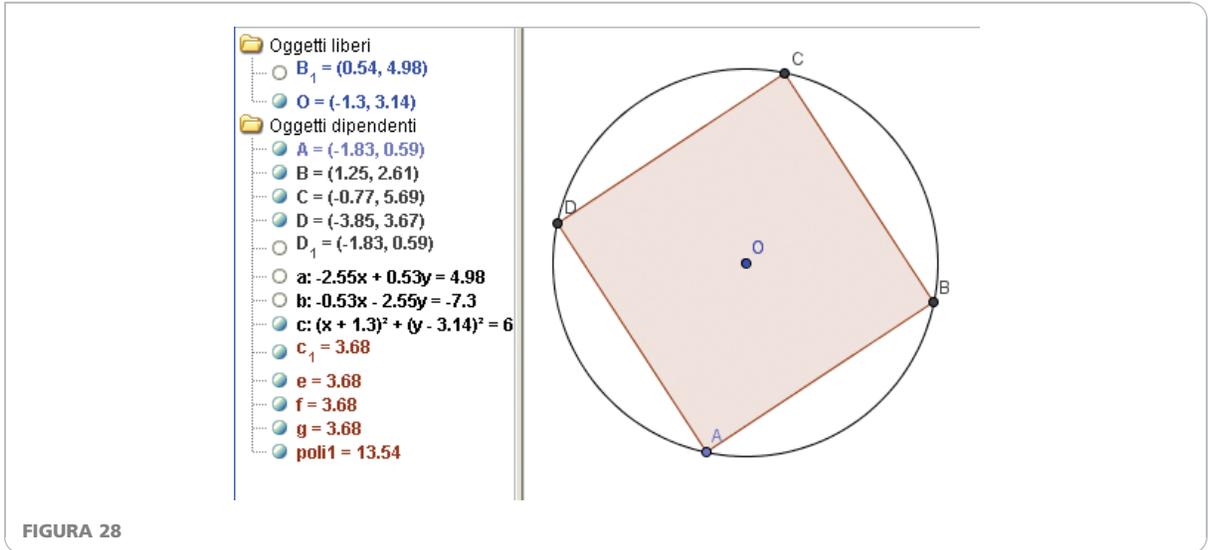
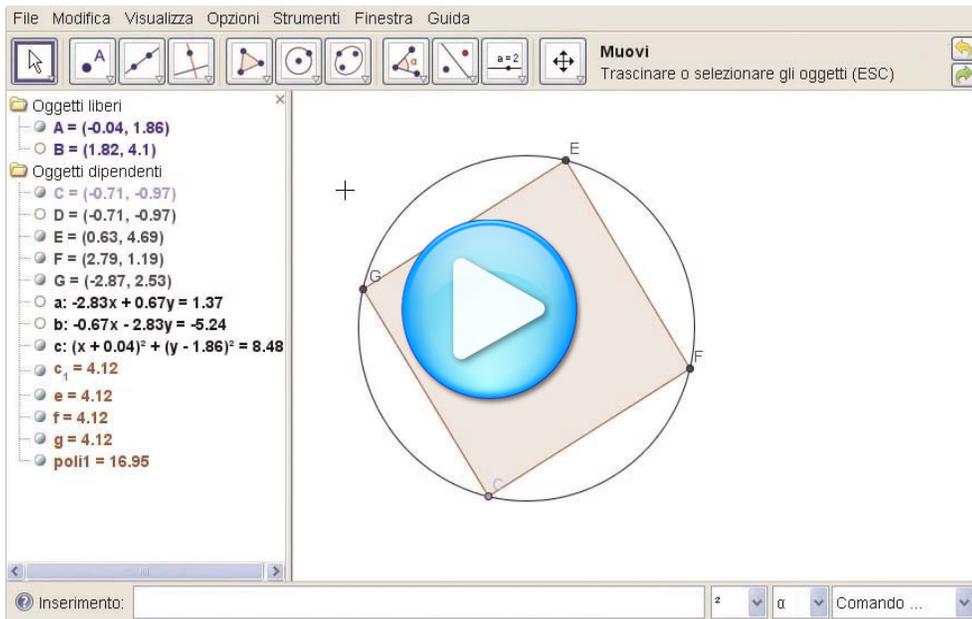


FIGURA 28

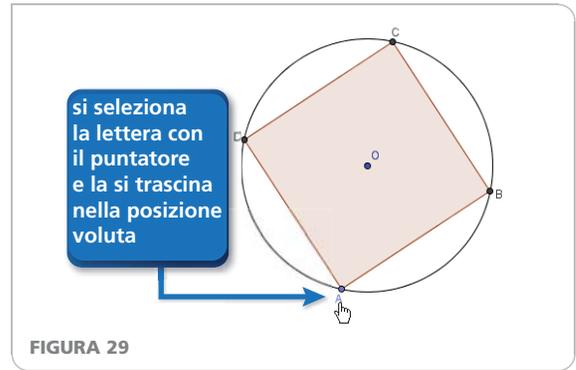
L'**ANIMAZIONE 12** mostra la procedura precedente.



Notiamo che il punto che in precedenza aveva nome *B* (e che abbiamo nascosto), adesso è stato rinominato in B_1 , perché la lettera *B* è stata usata per uno dei vertici del quadrato. Analogamente, il punto *D* è stato rinominato in D_1 .

Possiamo anche migliorare l'aspetto della figura spostando le lettere che contraddistinguono i vertici. Per farlo, utilizziamo lo strumento *Muovi*, denotato dall'icona  e presente nel menu del primo pulsante; esso serve appunto per selezionare ed eventualmente muovere gli oggetti.

Spostiamo il puntatore, per esempio, sopra la lettera A, e facciamo *clic* col pulsante sinistro, mantenendo premuto il pulsante: il puntatore assume la forma di una mano (FIGURA 29) e possiamo trascinare la lettera nella posizione voluta.

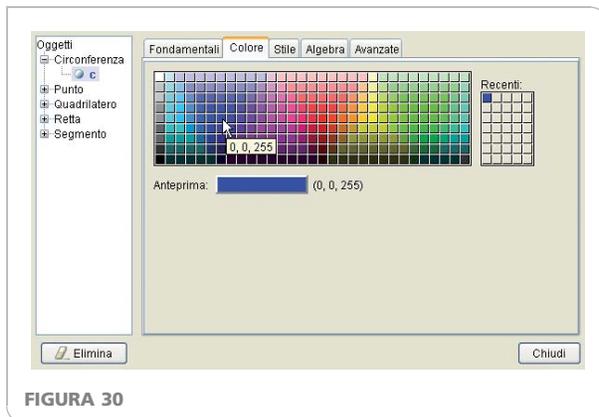


OPPURE

Anche per cambiare o nascondere le etichette degli oggetti è possibile agire in modi diversi. Per cambiare un'etichetta di un oggetto è sufficiente selezionare l'oggetto nella *Vista Grafica* o nella *Vista Algebra* cliccando su di esso con lo strumento *Muovi*, denotato dall'icona , e quindi scrivere il nuovo nome direttamente sulla tastiera premendo quindi *Invio*. Oppure si può fare *clic* sull'oggetto con il pulsante destro del mouse: compare un menu in cui è presente la voce *Rinomina*. Scegliendo questa voce apparirà una finestra in cui potremo inserire il nuovo nome. Per nascondere o mostrare un'etichetta si può anche operare nella finestra *Proprietà* che abbiamo già incontrato, dove è presente la voce *Mostra etichetta*: facendo *clic* sul quadratino a sinistra di questa possiamo far apparire o scomparire il segno di spunta e conseguentemente mostrare o nascondere l'etichetta. Si può anche scegliere, dal menu dell'ultimo pulsante a destra, lo strumento *Mostra/nascondi etichetta*, denotato dall'icona . Facendo *clic* con questo strumento su un oggetto la sua etichetta diventa visibile se era nascosta e viceversa.

9 Colorare gli oggetti e modificarne lo stile

Quando si realizzano costruzioni complesse, può essere utile colorarne gli elementi in modo da poterli distinguere più facilmente. È anche possibile modificare lo spessore delle linee o renderle tratteggiate. A tale scopo si deve utilizzare ancora la finestra *Proprietà* relativa all'oggetto in questione. Osserviamo ancora la FIGURA 27. Per modificare il colore degli oggetti occorre usare la scheda *Colore*, per modificare aspetti quali lo spessore delle linee o le “dimensioni” dei punti si deve usare la scheda *Stile*. Vediamo come cambiare il colore della circonferenza della nostra costruzione (FIGURA 30).



PER APPROFONDIRE

Non possiamo qui soffermarci per approfondire il significato della scrittura (0, 0, 255) che compare in FIGURA 30 di fianco all'*Anteprima* del colore selezionato. Ci limitiamo a dire che essa indica la composizione del colore selezionato secondo un sistema di descrizione dei colori detto *RGB* (a 8 bit per canale). La sigla *RGB* significa Red, Green, Blue (rosso, verde, blu), che sono i colori fondamentali in tale sistema.

1. Per prima cosa occorre visualizzare la finestra *Proprietà* relativa alla circonferenza. Possiamo procedere come abbiamo già visto operando indifferentemente nella *Vista Algebra* o nella *Vista Grafica*.
2. Nella finestra, facciamo *clic* sulla scheda *Colore*.
3. Portiamo il puntatore sul quadretto corrispondente al colore voluto e facciamo *clic*.
4. Sempre nella finestra *Proprietà*, apriamo ora la scheda *Stile* (FIGURA 31).
5. Per aumentare lo spessore della circonferenza trasciniamo a destra il cursore *Spessore linea* fino a quando otteniamo lo spessore voluto.
6. Per colorare i punti interni alla circonferenza trasciniamo a destra il cursore *Riempimento*: i punti interni alla circonferenza vengono colorati in una tonalità più chiara del colore della stessa circonferenza. Evitiamo di spostare completamente a destra questo cursore perché in tal modo la circonferenza diventerebbe indistinguibile dai punti interni a essa.

Cliccando nella finestra su *Chiudi*, osserviamo che la circonferenza ora è blu, mentre i punti interni a essa sono celesti (FIGURA 32).

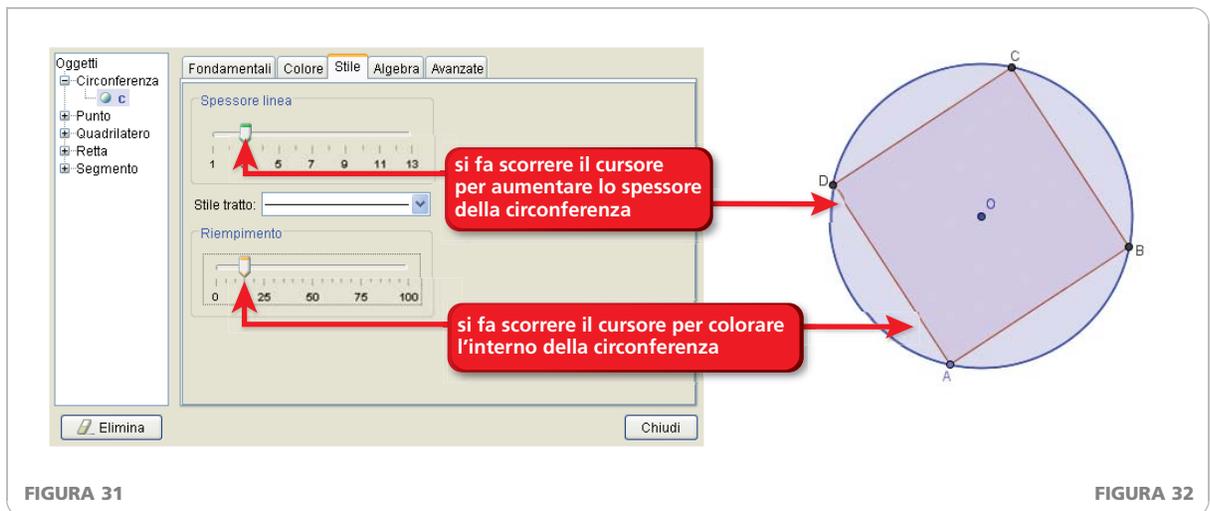


FIGURA 31

FIGURA 32

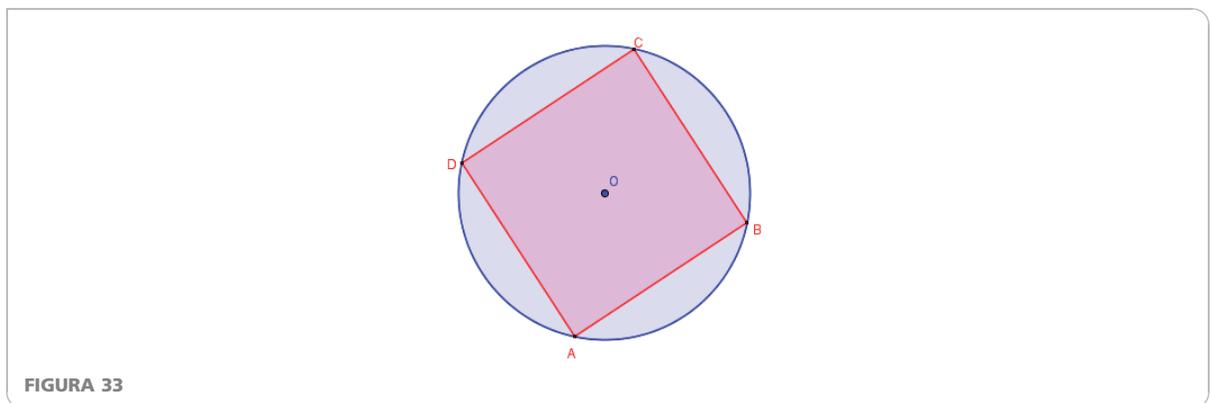
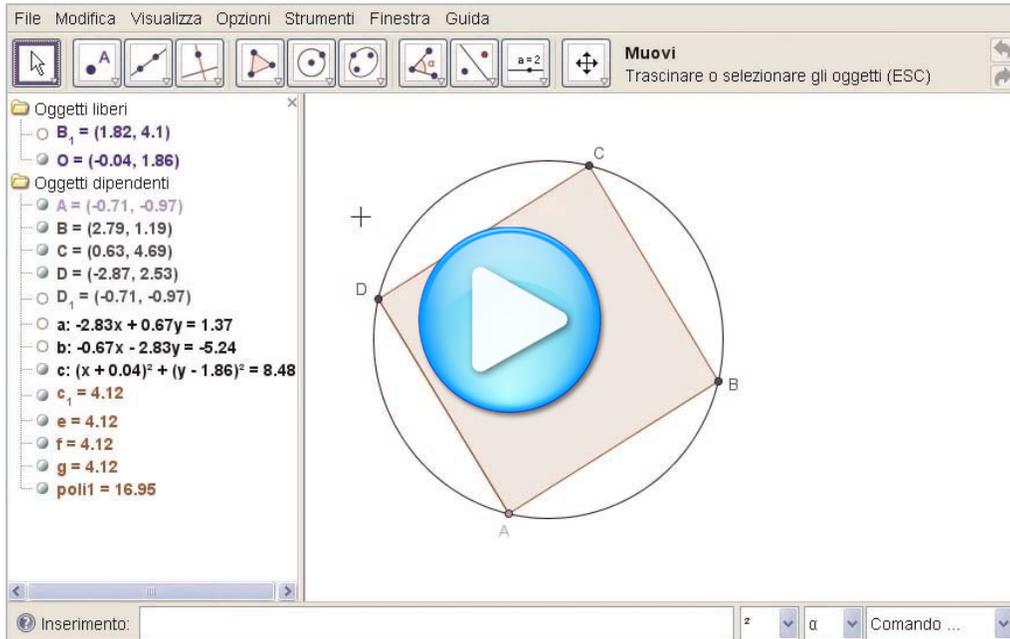


FIGURA 33

Per colorare gli altri elementi della figura potremmo ripetere ogni volta la procedura descritta. Però, analogamente a quando abbiamo rinominato i punti, anche qui possiamo lasciare aperta la finestra *Proprietà*, selezionare volta per volta gli elementi dall'elenco a sinistra (cliccando sul segno + accanto, per esempio, alla parola *Punto*, si apre l'elenco di tutti i punti) e attribuire a ciascuno il colore voluto (FIGURA 33).

L'ANIMAZIONE 13 mostra tutte le operazioni svolte per modificare la costruzione.



10 Misurare gli oggetti

Il quadrilatero $ABCD$ che abbiamo costruito “sembra”, indubbiamente, un quadrato. Ma come possiamo essere certi che esso non sia, ad esempio, un rettangolo con i lati approssimativamente, ma non esattamente, uguali, oppure un rombo con gli angoli anch’essi approssimativamente, ma non esattamente, retti?

GeoGebra visualizza nella *Vista Algebra* le misure degli oggetti che compaiono nella figura.

Come possiamo vedere nella **FIGURA 34**, i quattro lati del quadrilatero, con le relative misure, compaiono con il nome originario, assegnato automaticamente da *GeoGebra*; posizionando il puntatore su un oggetto della *Vista Grafica*, la sua definizione nella *Vista Algebra* viene evidenziata. Viceversa, se posizioniamo il cursore sulla definizione di un oggetto nella *Vista Algebra*, l’oggetto viene evidenziato nella *Vista Grafica*. L’ultima voce che compare nella *Vista Algebra* è relativa alla misura dell’area del quadrilatero.

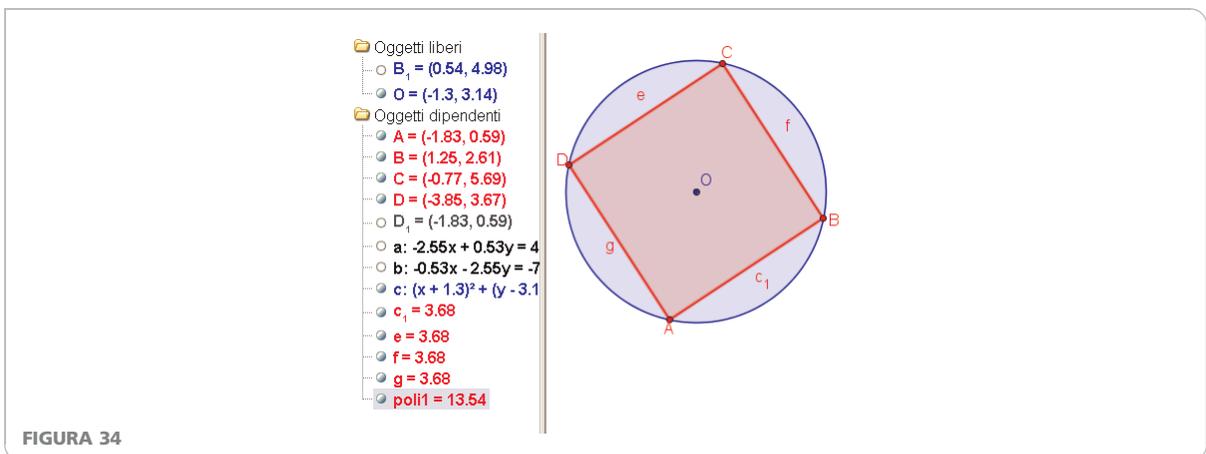


FIGURA 34

Dalla **FIGURA 34** (dove temporaneamente abbiamo reso visibili i nomi dei lati del quadrilatero nella *Vista Grafica*, inoltre abbiamo aumentato le dimensioni del carattere dal menu *Opzioni*), constatiamo che i

quattro lati hanno tutti la stessa misura. Ciò però non basta per affermare che $ABCD$ è un quadrato: occorre verificare che i suoi angoli siano retti.

Misuriamo dunque gli angoli del quadrilatero. Per ottenere la misura di un angolo occorre indicare a *GeoGebra* tre punti in un ordine preciso: il primo punto deve appartenere al primo lato dell'angolo, il secondo punto deve essere il vertice dell'angolo e il terzo punto deve appartenere al secondo lato; occorre inoltre considerare che *GeoGebra* individua l'angolo procedendo dal primo lato al secondo in senso antiorario. Ad esempio, per ottenere la misura dell'angolo \widehat{DAB} bisogna indicare, nell'ordine, i punti B, A, D (FIGURA 35).

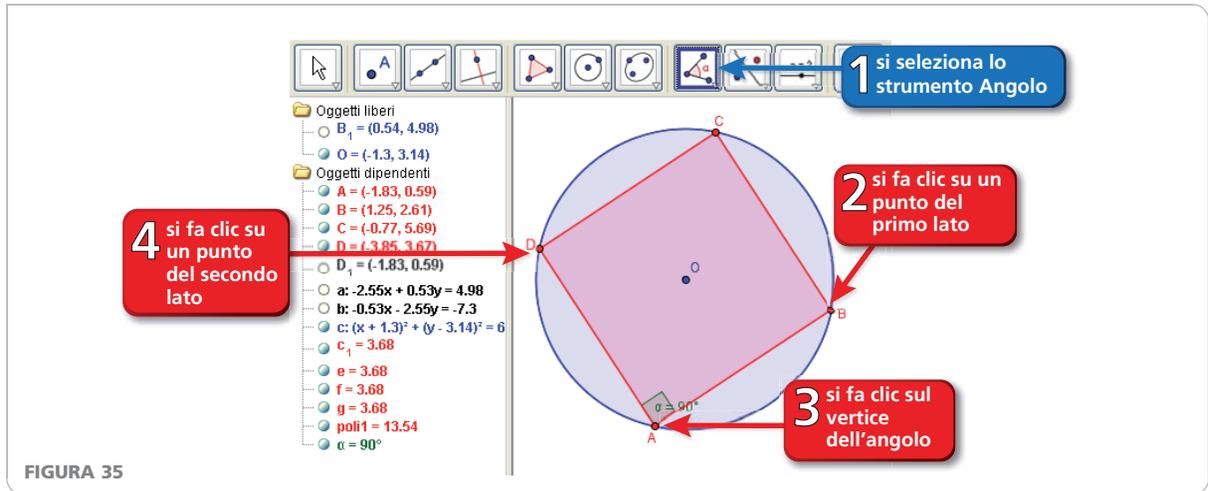


FIGURA 35

1. Selezioniamo lo strumento *Angolo*, contraddistinto dall'icona , che si trova nel menu del quarto pulsante.
2. Portiamo il puntatore vicino al punto B e, quando appare il messaggio *Punto B: Punto di intersezione tra c e b*, o quando il punto viene evidenziato, facciamo *click*.
3. Portiamo il puntatore vicino al punto A e, quando appare il messaggio *Punto A: Punto di intersezione tra c e a*, o quando il punto viene evidenziato, facciamo *click*.
4. Portiamo il puntatore vicino al punto D e, quando appare il messaggio *Punto D: Punto di intersezione tra c e b*, o quando il punto viene evidenziato, facciamo *click*.

Vediamo che l'angolo \widehat{DAB} appare evidenziato ed è visualizzata la sua ampiezza.

Ripetiamo quindi il procedimento descritto per misurare anche gli altri tre angoli. Vediamo il risultato in FIGURA 36: il quadrilatero costruito ha quattro angoli retti e con ciò abbiamo verificato che si tratta di un quadrato.

L'intera procedura è mostrata nell'ANIMAZIONE 14.

Concludiamo con due osservazioni.

Per selezionare i punti A, B, C, D con più facilità, possiamo operare anche nella *Visita Algebra*.

Le scritte che indicano l'ampiezza degli angoli possono essere spostate trascinandole con il mouse.

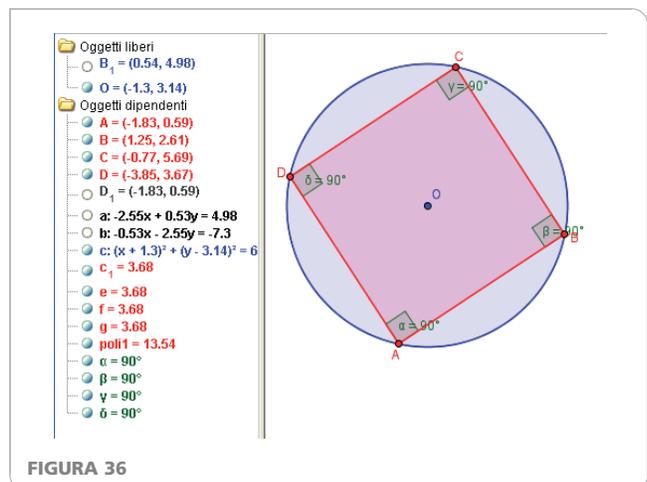
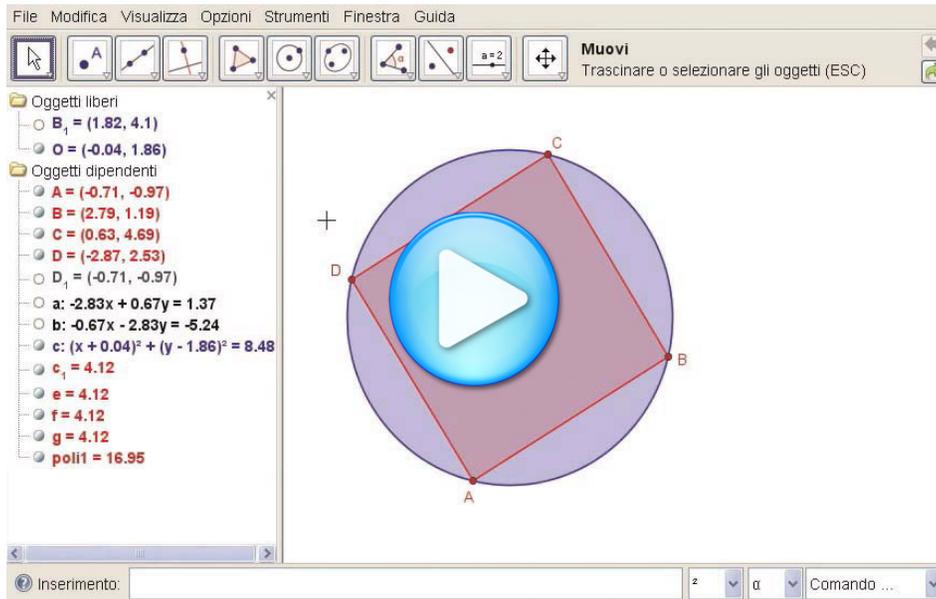


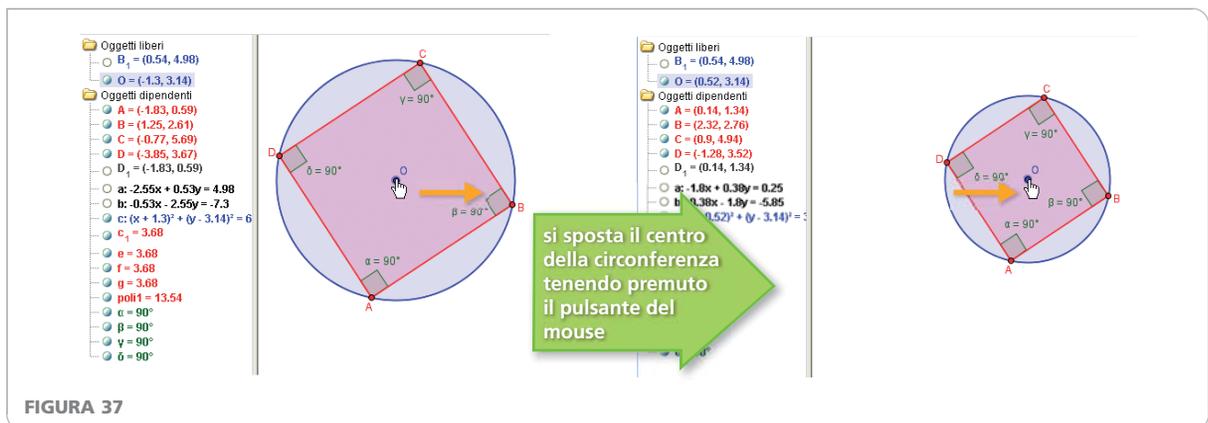
FIGURA 36



Comprendere GeoGebra

11 Modificare la figura

Selezioniamo ora lo strumento *Muovi*, contraddistinto dall'icona , e portiamo il puntatore vicino al centro O della circonferenza, finché esso appare evidenziato. Se a questo punto premiamo il pulsante sinistro senza rilasciarlo, il puntatore prende la forma  di una mano con l'indice puntato. Spostiamo ora il mouse, sempre tenendo premuto il pulsante. Vediamo che il punto O si sposta e contemporaneamente varia la dimensione della circonferenza; anche i vertici del quadrilatero si spostano, ma continuano a trovarsi sulla circonferenza e il quadrilatero, pur cambiando le proprie dimensioni, continua a essere un quadrato (FIGURA 37).



Proviamo ora, con la stessa tecnica, a spostare il punto A . Notiamo che il punto A si comporta in modo diverso rispetto al punto O . Mentre il centro della circonferenza poteva essere spostato liberamente in qualsiasi posizione del piano, il punto A può essere spostato, ma rimane sempre sulla circonferenza, e non possiamo allontanarlo da essa. Questo comportamento dipende dal modo in cui abbiamo costruito il punto A . Infatti, come si vede nella FIGURA 18, per creare A abbiamo fatto *click* all'apparizione del mes-

saggio *Circonferenza c*; in questo modo abbiamo creato un punto *vincolato* alla circonferenza. Osserviamo inoltre che, spostando il punto *A*, si spostano anche gli altri tre vertici del quadrilatero, ma le misure dei lati e degli angoli non cambiano (FIGURA 38).

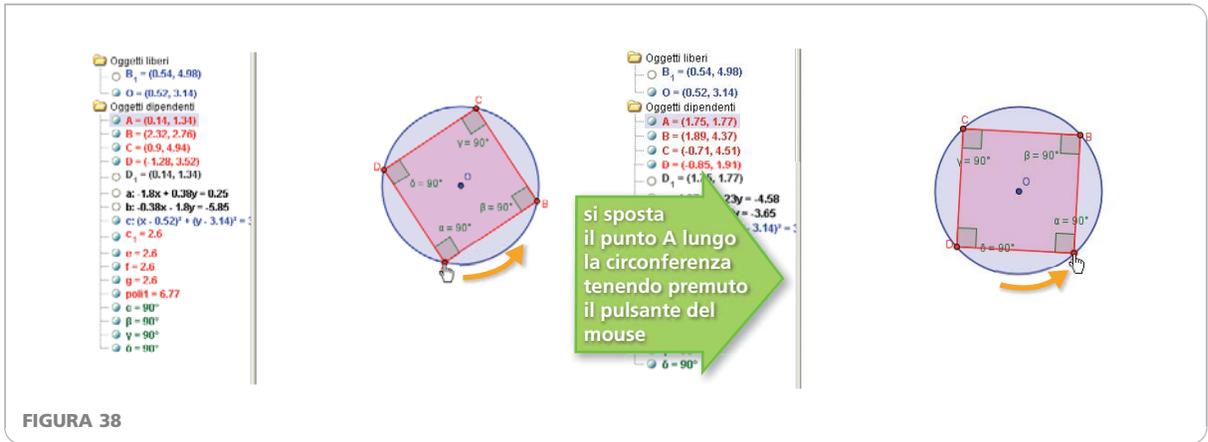
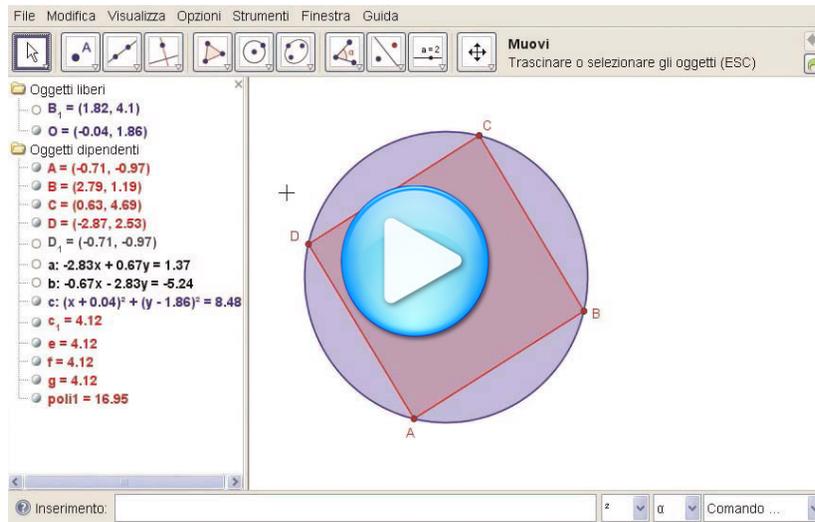


FIGURA 38

L'ANIMAZIONE 15 mostra gli spostamenti del centro *O* e del punto *A*.



Se infine proviamo a spostare il punto *C*, ci accorgiamo che non è possibile. Ciò dipende dal fatto che il punto *C* è stato creato come intersezione tra la circonferenza e la retta passante per *A* e per *O*. La sua posizione non può perciò essere modificata direttamente, ma solo modificando gli oggetti mediante cui esso è stato definito. Abbiamo visto infatti come, spostando il punto *A* (FIGURA 38) o il punto *O* (FIGURA 37), si sposta anche il punto *C*, che rimane però sempre nell'intersezione tra la circonferenza e la retta *OA*.

12 Oggetti liberi, oggetti vincolati, oggetti costruiti

Gli “esperimenti” e le considerazioni del paragrafo precedente ci suggeriscono la seguente classificazione degli oggetti presenti in una costruzione di *GeoGebra*.

■ Oggetti liberi

Sono gli oggetti creati da noi senza alcun vincolo. Gli oggetti liberi possono essere spostati e modificati senza alcuna limitazione. Nella nostra costruzione gli oggetti liberi sono i punti *O* e *B₁*, ciascuno dei quali può essere spostato a piacimento (ovviamente per spostare il punto *B₁* occorre prima renderlo visibile).

Oggetti vincolati

Sono gli oggetti creati da noi in modo che appartengano a un oggetto preesistente. Gli oggetti vincolati possono essere spostati o modificati, ma solo in modo che venga rispettato il vincolo con cui sono stati definiti. Nella nostra costruzione il punto A è un oggetto vincolato: esso è stato costruito in modo che appartenga alla circonferenza, e può essere spostato solo sulla circonferenza.

Oggetti costruiti

Sono gli oggetti che non sono stati creati da noi, ma sono stati definiti mediante oggetti preesistenti. Gli oggetti costruiti non possono essere modificati o spostati direttamente, ma solo spostando o modificando gli oggetti, liberi o vincolati, da cui dipende la loro costruzione. Nella nostra costruzione sono oggetti costruiti i punti A, B, C, D e il quadrato $ABCD$.

Osserviamo che *GeoGebra* nella *Vista Algebra* suddivide gli oggetti in *liberi* e *dipendenti*: in questa ultima categoria sono raggruppati quelli che noi abbiamo chiamato *Oggetti vincolati* e *Oggetti costruiti*.

PERCHÉ

Eseguendo gli “esperimenti” descritti nel paragrafo precedente, abbiamo visto che spostando il punto O cambia la dimensione della circonferenza. Ciò dipende dal fatto che abbiamo costruito la circonferenza in modo che avesse il centro in O e passasse per un punto (il cui nome ora è B_1) che poi abbiamo nascosto. Il raggio della circonferenza è perciò la lunghezza del segmento OB_1 e, pertanto, se avviciniamo il centro O al punto B_1 il raggio della circonferenza diminuisce, mentre se lo allontaniamo il centro della circonferenza aumenta.

Il punto B_1 è un oggetto libero: prova a renderlo visibile e a spostarlo. Vedrai che la circonferenza cambia le sue dimensioni senza che si sposti il suo centro.

13 Verificare una costruzione

Per verificare la correttezza di una costruzione eseguita con *GeoGebra* non è sufficiente esaminarla visivamente. Un metodo più efficace è cercare di modificare la costruzione accertandosi che le proprietà generali siano ancora soddisfatte.

Ci spieghiamo con un esempio. Riprendiamo in esame la costruzione che abbiamo eseguito. La richiesta era di *costruire un quadrato inscritto in una circonferenza data*. Dunque, comunque venga modificata la figura, il quadrilatero deve continuare a essere un quadrato, e i suoi vertici devono sempre trovarsi sulla circonferenza, come abbiamo visto nel **PARAGRAFO 11**, **FIGURE 37** e **38**. Se abbiamo sbagliato qualche passaggio della costruzione può invece succedere qualcosa di diverso.

In **FIGURA 39** vediamo cosa può succedere spostando il punto A .

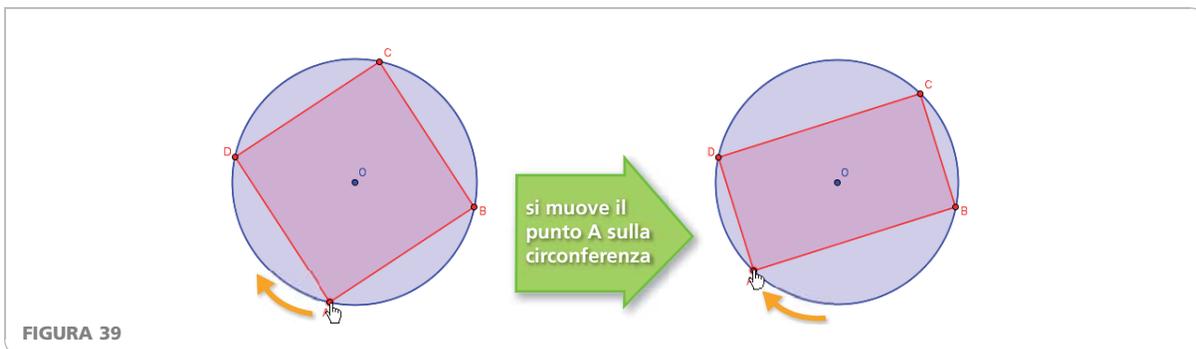


FIGURA 39

In questo caso il quadrato si trasforma in un rettangolo. La costruzione non è corretta, perché quando abbiamo definito la diagonale BD abbiamo dimenticato di specificare che doveva essere perpendicolare ad AC .

La **FIGURA 40** rivela un diverso errore nella stessa costruzione: in questo caso abbiamo definito il punto B in maniera scorretta.

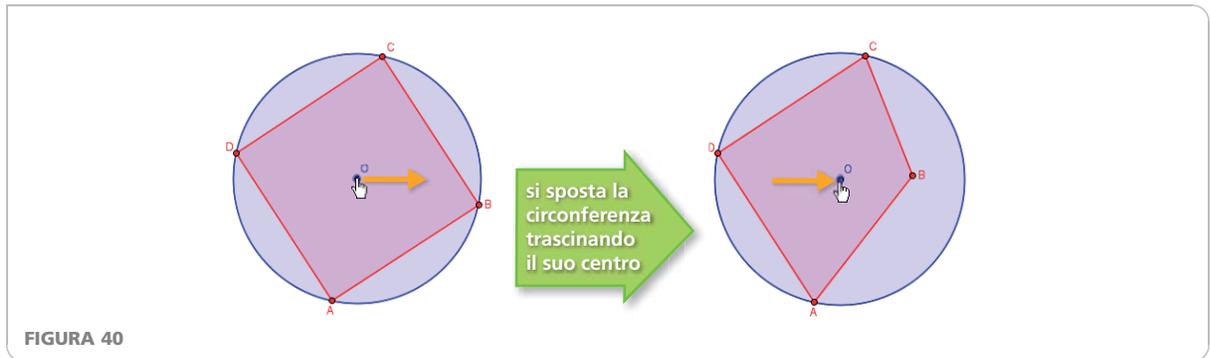


FIGURA 40

Infatti, diminuendo il raggio della circonferenza, gli altri punti si spostano in modo da trovarsi sempre su di essa, mentre B viene a trovarsi all'interno della circonferenza.

Le possibilità di errore crescono insieme alla complessità della costruzione. In generale, per scoprire gli errori, è consigliabile rendere visibili tutti gli oggetti nascosti. Ci si può anche servire del *Protocollo di costruzione*, cui si può accedere dal menu *Visualizza*.

Usare GeoGebra per tracciare grafici e funzioni

14 Inserire espressioni

Come abbiamo detto in precedenza, vediamo ora come usare *GeoGebra* per tracciare grafici di funzioni.

A tale scopo è sufficiente scrivere l'equazione della funzione di cui vogliamo tracciare il grafico nella casella della barra d'inserimento, che si trova nella parte inferiore della finestra di *GeoGebra*. (**FIGURA 41**). A fianco di questa compaiono due menu a tendina (**FIGURA 42**) utili per inserire simboli e funzioni matematiche (menu di sinistra) e lettere greche (menu di destra).



FIGURA 41

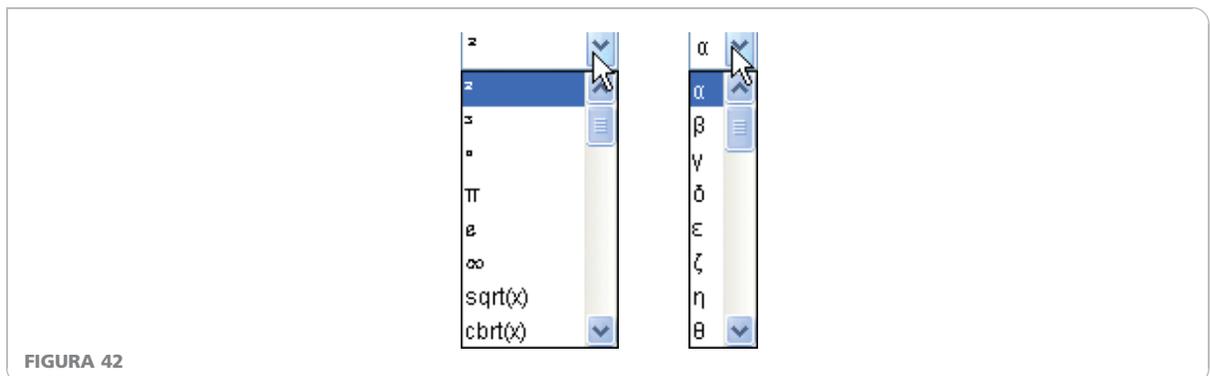


FIGURA 42

La sintassi delle espressioni algebriche in *GeoGebra* è simile a quella comunemente usata in matematica; in particolare si utilizzano i simboli:

- + per l'addizione;
- – per la sottrazione;
- * per la moltiplicazione;
- / per la divisione;
- ^ per le potenze.

Si possono inoltre utilizzare le parentesi tonde (le parentesi quadre e graffe sono destinate a utilizzi particolari). Devi tener presente che le espressioni vanno scritte su un'unica linea: per rappresentare una frazione si dovranno perciò scrivere il numeratore e il denominatore rispettivamente prima e dopo il simbolo di divisione / ed eventualmente racchiusi tra parentesi. Analoghe considerazioni valgono per la rappresentazione delle potenze.

In altre parole, usando le parentesi occorre fornire a *GeoGebra* tutte le indicazioni per l'ordine corretto con cui eseguire le operazioni. A questo proposito riportiamo alcuni esempi.

$(x+7)/(x-3)$	rappresenta	$\frac{x+7}{x-3}$
$5+x/12-y$	rappresenta	$5 + \frac{x}{12} - y$
$2^{(x-3)}$	rappresenta	2^{x-3}
2^5-x	rappresenta	$2^5 - x$

Le espressioni possono contenere numeri e lettere. Occorre tenere presenti le indicazioni che seguono.

- I numeri si rappresentano utilizzando l'abituale notazione: occorre soltanto ricordare di utilizzare il punto al posto della virgola decimale.
- Il simbolo di moltiplicazione può essere omesso dove non vi siano ambiguità: per esempio si può scrivere $2a$ invece di $2*a$; per indicare $2 \cdot 3$ occorre invece scrivere $2*3$. Osserva che *GeoGebra* accetta, per esempio, l'immissione dell'equazione $y=2x$, ma non l'espressione $y=x2$.

Per utilizzare correttamente le principali funzioni matematiche devi usare i nomi predefiniti di *GeoGebra*. Per esempio per inserire la funzione $y = \sqrt{x}$ devi scrivere $y=\text{sqrt}(x)$ (dall'inglese *square root*, che significa appunto *radice quadrata*). Nella guida di *GeoGebra*, cui si accede dal menu *Guida*, puoi trovare l'elenco delle funzioni predefinite.

15 Tracciare e modificare semplici grafici di funzioni

Per tracciare i grafici di funzione è utile visualizzare gli assi e la griglia mediante le rispettive voci del menu *Visualizza*.

Scriviamo poi una semplice espressione, per esempio $y = x - 2$, e premiamo *Invio* (FIGURA 43).

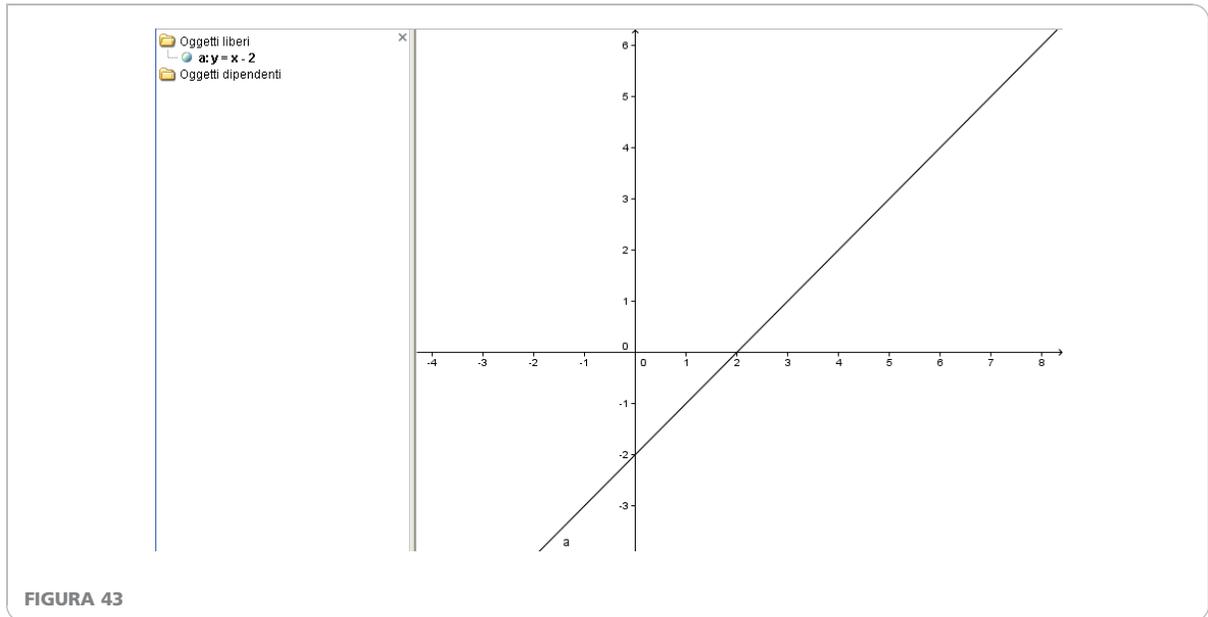


FIGURA 43

GeoGebra traccia il grafico della retta di equazione $y = x - 2$.

La funzione appena immessa compare nella *Vista Algebra* come oggetto libero, e a essa è associato il nome *a*.

Inseriamo ora l'espressione $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$. Essa va scritta nella casella d'inserimento nella forma $y=(1/2)x^2-x-3/2$. Dopo avere premuto *Invio*, *GeoGebra* traccia il grafico di questa funzione, che è una parabola (FIGURA 44).

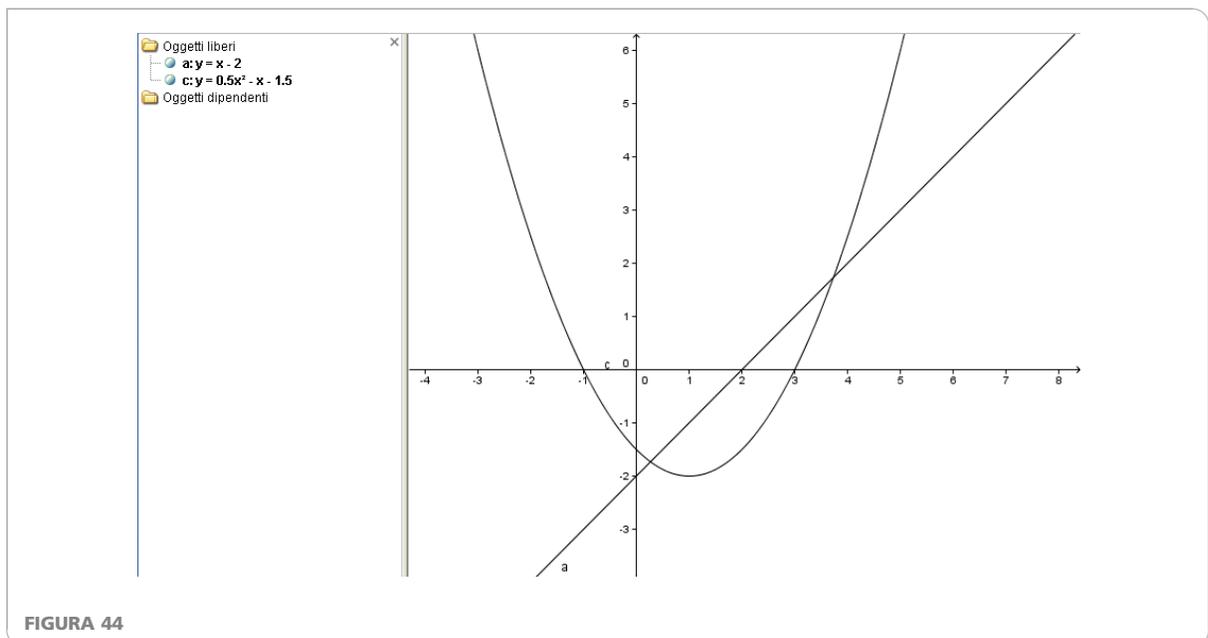


FIGURA 44

I grafici delle funzioni possono essere modificati come tutti gli altri oggetti: possiamo modificarne il colore, lo spessore, lo stile mediante la finestra *Proprietà* che abbiamo già incontrato. Facendo *clic* con il pulsante destro del mouse in una zona vuota della *Vista Grafica* si può accedere alla finestra, che porta lo stesso nome *Vista Grafica* (FIGURA 45) mediante la quale possiamo modificare l'aspetto degli assi e quello della griglia.

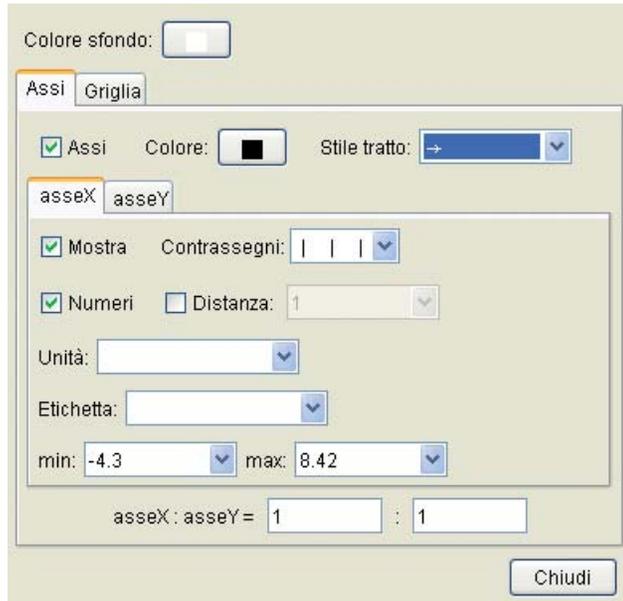


FIGURA 45

In FIGURA 46 puoi vedere i risultati di alcune di queste modifiche

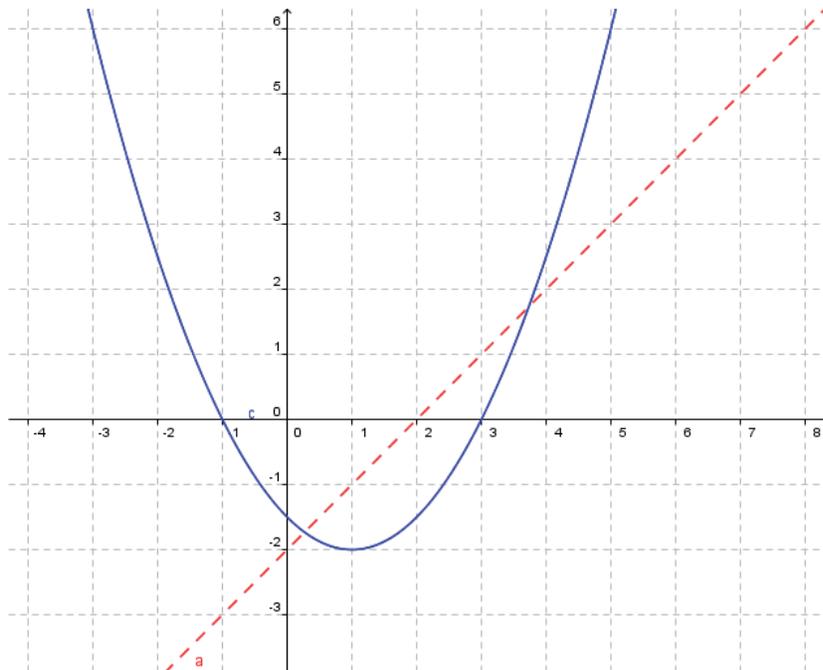
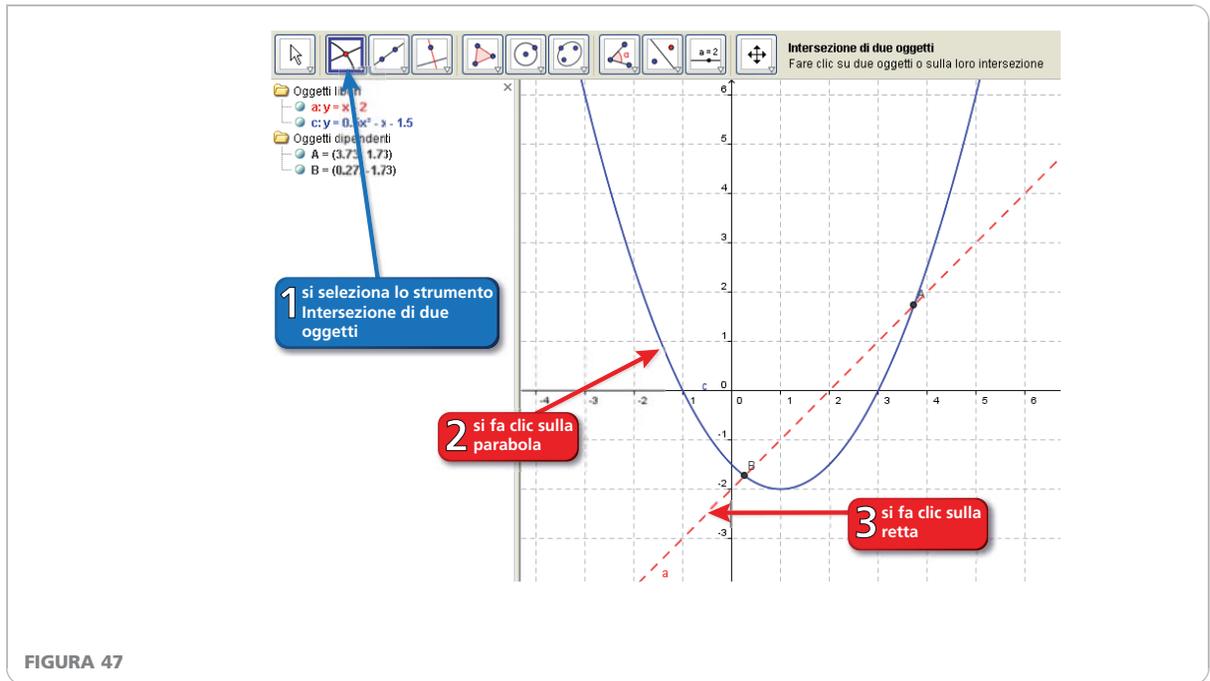
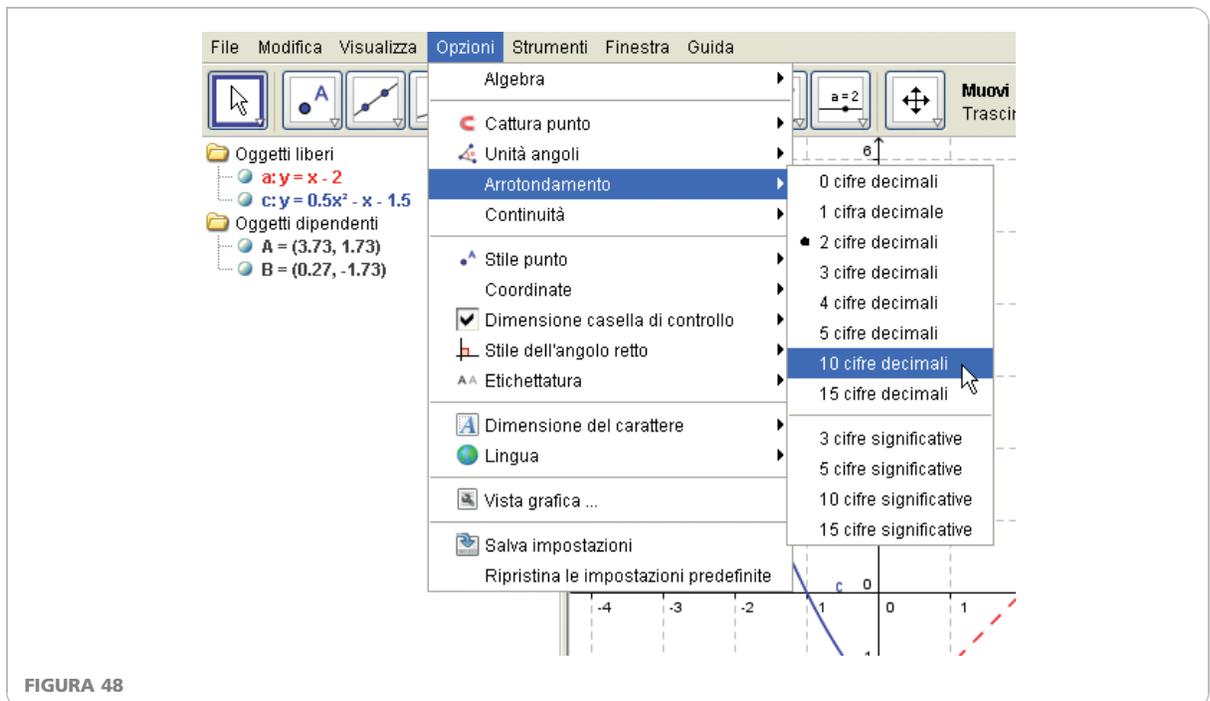


FIGURA 46

Possiamo ora cercare i punti d'intersezione tra la retta e la parabola: selezioniamo lo strumento *Intersezione di due oggetti*, denotato dall'icona , che si trova nel menu del secondo pulsante e con esso facciamo *click* prima sulla parabola e poi sulla retta: appaiono i due punti di intersezione (FIGURA 47).



Notiamo che le coordinate dei punti sono rappresentate da numeri decimali che, per impostazione predefinita hanno due cifre dopo la virgola: salvo casi particolari dobbiamo ritenere questi numeri delle approssimazioni. Possiamo però migliorare queste approssimazioni scegliendo, dal menu *Opzioni* il sottomenu *Arrotondamento* (FIGURA 48) con cui è possibile impostare la visualizzazione dei numeri decimali con un numero maggiore (fino a 15) di cifre dopo la virgola.



In FIGURA 49 vedi le coordinate dei punti A e B con 10 cifre decimali.

