Algebra dei vettori

1 Definizione di vettore

Vi sono grandezze, quali il tempo, la temperatura, la massa di un corpo, il lavoro compiuto da una forza, che sono individuate completamente da un numero che ne rappresenta la misura rispetto a una unità prefissata. Grandezze fisiche di questo tipo si chiamano **grandezze scalari**.
Vi sono d'altra parte grandezze, quali la velocità di un corpo o la forza applicata a un oggetto, che sono definite invece, oltre che da un valore numerico (detto *modulo* o *intensità*), da una *direzione* e da un *verso* (e a volte anche da un *punto di applicazione*). Grandezze fisiche di questo tipo si chiamano **grandezze vettoriali** e sono rappresentate da enti matematici detti **vettori**.
Prima di dare la definizione di vettore, occorre introdurre il concetto di segmento orientato.
Si dice **segmento orientato** nel piano un segmento AB (con $A \neq B$) in cui sia fissato un verso di percorrenza da A verso B o da B verso A. Un segmento AB, orientato per esempio da A verso B, si indica con il simbolo $\overrightarrow{AB}$ e permette di individuare (*fig. 1*):

1. una *direzione* (quella della retta AB);

2. un *verso* (quello da A a B);

3. una *lunghezza*, o *intensità*, o *modulo* (il numero positivo che dà la misura di AB, rispetto a un'unità di misura prefissata);

4. un punto *origine*, o punto di applicazione (il punto A).

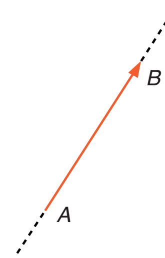


Figura 1

Viceversa, queste proprietà individuano un segmento orientato nel piano.

Due segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ che abbiano in comune direzione, verso e modulo, e quindi differiscano soltanto per l'origine, si dicono **equipollenti** e si scrive $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$. Osserviamo che in generale due segmenti orientati equipollenti sono paralleli (ma possono anche appartenere alla stessa retta). Per convenzione, tutti i segmenti nulli si considerano tra loro equipollenti.

È facile verificare che la relazione di equipollenza tra segmenti orientati gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, quindi è una *relazione d'equivalenza*.
La relazione di equipollenza permette perciò di suddividere l'insieme dei segmenti orientati in *classi d'equivalenza*. Si chiama **vettore** ciascuna di queste classi d'equivalenza. Ogni vettore può essere rappresentato da un qualsiasi segmento orientato appartenente alla classe di equivalenza che definisce il vettore.

Un **vettore** è un ente individuato da una **direzione**, un **verso**, un **modulo** o **intensità**; è rappresentato da un segmento orientato e da tutti i segmenti a esso equipollenti.

I vettori si possono indicare sia con lettere in neretto, ad esempio **u**, **v**, **w**, ecc., sia con lettere minuscole sottolineate, ad esempio $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, ecc. sia con lettere in corsivo sovrastate da una freccia; noi adotteremo quest'ultima scrittura.

Il modulo di un vettore $\vec{v}$ si può indicare indifferentemente con le scritture: v, $|\vec{v}|$ o $||\vec{v}||$.

Per disegnare un vettore, si traccia un segmento orientato.

- Un vettore che ha modulo uguale a zero viene detto **vettore nullo**.
  Il vettore nullo si indica con $\vec{0}$ e ha direzione e verso indeterminati.
- Due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono uguali se hanno in comune direzione, verso e modulo.
- Due vettori che abbiano la stessa direzione si dicono **paralleli**.
  Due vettori *paralleli* si dicono **concordi** o **discordi** a seconda che lo siano due loro rappresentanti.
- Due vettori che abbiano lo stesso modulo e la stessa direzione, ma verso contrario, si chiamano **vettori opposti**. L'opposto di un vettore $\vec{v}$ si indica con $-\vec{v}$.

2 Addizione tra vettori

Dati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e detto $\overrightarrow{AB}$ un rappresentante di $\vec{u}$, consideriamo, come rappresentante di $\vec{v}$, il segmento orientato $\overrightarrow{BC}$, consecutivo ad $\overrightarrow{AB}$ (*fig. 2*).
Si chiama **somma** di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ il vettore $\vec{w}$ rappresentato da $\overrightarrow{AC}$, e si scrive:

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

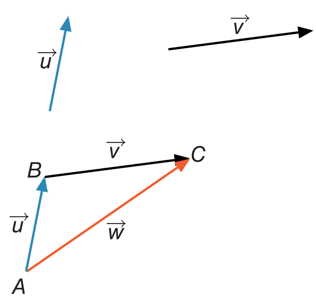


Figura 2

I vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ si chiamano **addendi**.

La precedente definizione di somma si può anche esprimere tramite una regola, detta **regola del parallelogramma**.

La somma di due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è il vettore $\vec{w}$ rappresentato dalla diagonale, uscente da un punto A del piano, del parallelogrammo costruito sui due rappresentanti di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ uscenti anch'essi da A.

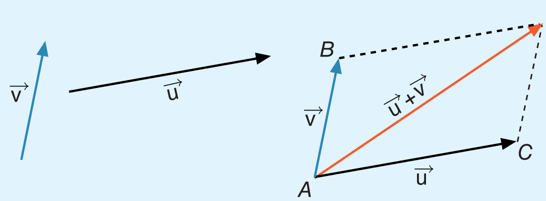


Figura 3

La **somma di più vettori**, dati in un certo ordine, è il vettore che si ottiene addizionando il primo vettore al secondo, poi addizionando il risultato ottenuto al terzo vettore e così via, fino a esaurire tutti gli addendi.

Nella pratica si usa un procedimento più veloce. Ad esempio, se si sommano cinque vettori (*fig. 4*), la loro somma è rappresentata dal segmento orientato che unisce il punto di applicazione A del primo vettore con l'ultimo estremo della linea poligonale i cui lati sono i rappresentanti dei singoli vettori, tracciati l'uno di seguito all'altro a partire dal punto A (*regola della poligonale*).

L'addizione tra vettori gode delle *proprietà associativa* e *commutativa*, ha elemento neutro $\vec{0}$ e per ogni vettore $\vec{v}$ esiste un unico vettore opposto $-\vec{v}$.

Si chiama **differenza** di due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e si indica con $\vec{u} - \vec{v}$, la somma del vettore $\vec{u}$ con l'opposto di $\vec{v}$, cioè: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.
La figura 5 illustra graficamente i vettori $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.

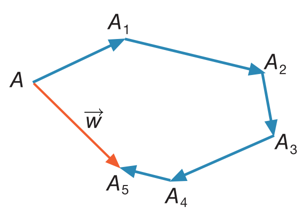


Figura 4

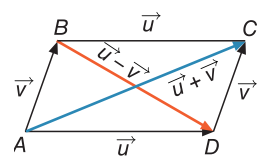


Figura 5

3 Prodotto di un vettore per un numero reale

Definiamo ora un'altra operazione sui vettori, che a ogni coppia formata da un numero reale e da un vettore associa un vettore.

Siano $\vec{u}$ un vettore non nullo e a un numero reale non nullo.
Si chiama **prodotto** del numero a per il vettore $\vec{u}$, e si indica con $a\vec{u}$, il vettore che ha:

- la stessa direzione del vettore $\vec{u}$;
- il verso concorde o contrario a quello di $\vec{u}$, a seconda che il numero a sia positivo o negativo;
- il modulo uguale al prodotto del modulo di $\vec{u}$ per il valore assoluto di a.

Se poi $\vec{u} = \vec{0}$, oppure $a = 0$, allora si pone, per definizione:

$$0\,\vec{u} = a\,\vec{0} = \vec{0}$$

Dalla definizione data segue che se $\vec{u} = a\vec{v}$, i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono *paralleli*.
Viceversa, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono paralleli, allora risulta $\vec{u} = a\vec{v}$, con $a = \pm\frac{u}{v}$, in cui vale il segno $+$ o $-$ a seconda che i versi di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ siano concordi o discordi.
Poiché $\vec{0} = 0\vec{u}$, conveniamo che il vettore nullo $\vec{0}$ sia parallelo a ogni altro vettore.
Infine, qualsiasi siano i numeri reali a e b e i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, valgono le seguenti *proprietà*:

- *associativa*: $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$

- *distributiva dell'addizione di numeri rispetto al prodotto per un vettore:* $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
- *distributiva del prodotto per un numero rispetto all'addizione di vettori:* $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
- *ruolo del numero* 1: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot 1 = \vec{u}$

4 Versori

Un vettore di modulo unitario si dice **vettore unitario** o **versore**.

Si dice versore di un vettore $\vec{u}$ il versore $\vec{r}$ che ha in comune con il vettore $\vec{u}$ la direzione e il verso (*fig. 6*), e si scrive $\vec{r} = \text{vers}\ \vec{u}$.

Un vettore si può quindi scrivere come prodotto di una parte vettoriale, il suo versore, e una parte numerica (o scalare), il suo modulo:

$$\boxed{\vec{u} = u\,\vec{r}}$$

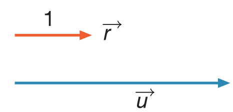


Figura 6

Nelle applicazioni sono di particolare importanza i cosiddetti **versori fondamentali** $\vec{i}$ e $\vec{j}$, che sono definiti in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale *Oxy* (*fig. 7*):

- $\vec{i}$ è il versore che ha la stessa direzione e lo stesso verso dell'asse x;
- $\vec{j}$ è il versore che ha la stessa direzione e lo stesso verso dell'asse y.

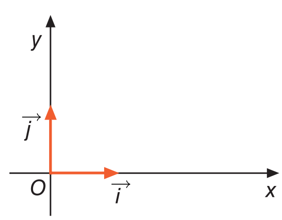


Figura 7

Scomposizione cartesiana di un vettore

In un sistema cartesiano ortogonale *Oxy*, consideriamo i versori fondamentali $\vec{i}$ e $\vec{j}$ (*fig. 8*).

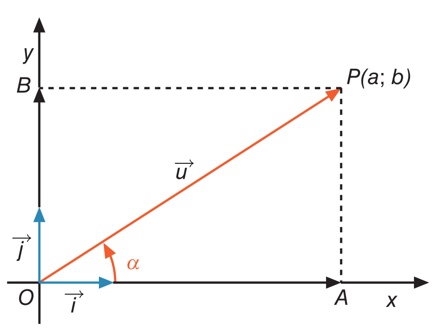


Figura 8

Dato il punto $P(a; b)$, tracciamone le proiezioni sull'asse x, nel punto $A(a; 0)$, e sull'asse y, nel punto $B(0; b)$.

Per definizione di somma tra vettori, si ha:

(1) $$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

Essendo $\overrightarrow{OA} = a\,\vec{i}$ e $\overrightarrow{OB} = b\,\vec{j}$, la (1) si può scrivere:

(2) $$\boxed{\overrightarrow{OP} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}}$$

I numeri a e b si chiamano **componenti**, o **coordinate**, del vettore $\overrightarrow{OP}$.

La relazione fondamentale (2) si chiama **scomposizione cartesiana** del vettore $\overrightarrow{OP}$ tramite i versori fondamentali $\vec{i}$ e $\vec{j}$ e le coordinate $(a; b)$ di P.

Il modulo del vettore $\vec{u} = \overrightarrow{OP} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$ è $u = \sqrt{a^2 + b^2}$, la direzione è data dall'angolo α che il vettore forma con il semiasse positivo delle x e risulta:

$$\cos\alpha = \frac{a}{u} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{u}$$

Se il vettore $\vec{u}$ forma un angolo α con l'asse x, le sue componenti sono
$u_x = a = u \cos\alpha$
$u_y = b = u \operatorname{sen}\alpha$

Si osservi che a ogni punto $P(a; b)$ del piano cartesiano corrisponde uno e un solo vettore $\overrightarrow{OP} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$.

Viceversa, a ogni vettore $\vec{u}$ corrisponde uno e un solo punto P del piano cartesiano tale che $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$.

Per questo motivo, il vettore $\overrightarrow{OP}$ di componenti a e b si può identificare con le sue componenti e si scrive:

$$\overrightarrow{OP} = (a, b)$$

Se si considerano le coordinate di due punti del piano cartesiano, $P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_2; y_2)$, si ha (*fig. 9*):

$$\overrightarrow{OP_1} = x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} \qquad \overrightarrow{OP_2} = x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} \qquad \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$

(3) $$\boxed{\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j}}$$

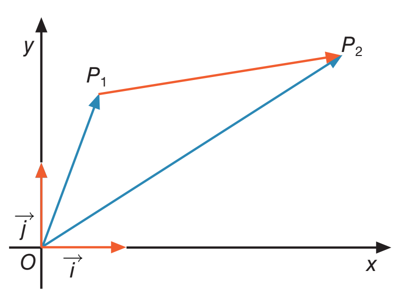


Figura 9

I numeri $(x_2 - x_1)$ e $(y_2 - y_1)$ si chiamano ancora *componenti*, o *coordinate*, del vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Pertanto, *per determinare le coordinate di un vettore, basta considerare un qualunque segmento orientato che rappresenti il vettore e calcolare la differenza delle ascisse e la differenza delle ordinate dei suoi estremi.*

Poiché il modulo del vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$ è la *distanza* tra i due punti P_1 e P_2, si ha che:

$$(4) \qquad \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Osserviamo che due vettori sono paralleli se hanno le componenti in proporzione.

Ad esempio $u = -2\vec{i} - 4\vec{j}$ e $v = 3\vec{i} + 6\vec{j}$ sono paralleli perché $-2 : 3 = -4 : 6$.

ESEMPI

1 Determiniamo la scomposizione cartesiana e il modulo del vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$, con $P_1(3; 1)$ e $P_2(2; -5)$

Per la (3), si ha: $\overrightarrow{P_1P_2} = (2 - 3)\,\vec{i} + (-5 - 1)\,\vec{j} = -\vec{i} - 6\,\vec{j}$

e, per la (4): $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(-1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{37}$.

2 Dati i vettori $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, con $A(2; 1)$, $B(3; 2)$ e $C(-4; 3)$, determiniamo la somma $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$ e la differenza $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$

Si ha: $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{v} = -7\,\vec{i} + \vec{j}$, da cui:

$$\vec{u} + \vec{v} = (1 - 7)\,\vec{i} + (1 + 1)\,\vec{j} = -6\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$$
$$\vec{u} - \vec{v} = (1 + 7)\,\vec{i} + (1 - 1)\,\vec{j} = 8\,\vec{i}$$

Se si tiene conto delle proprietà dell'addizione tra due vettori e del prodotto di un vettore per un numero reale, se $\vec{u} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$ e $v = c\,\vec{i} + d\,\vec{j}$, allora $\vec{u} + \vec{v} = (a + c)\,\vec{i} + (b + d)\,\vec{j}$ e $k\,\vec{u} = ka\,\vec{i} + kb\,\vec{j}$.

5 Prodotto scalare di due vettori

Dati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, si dice angolo formato da essi l'angolo *convesso* formato da due segmenti orientati, aventi la stessa origine, che rappresentano i due vettori (*fig. 10*).

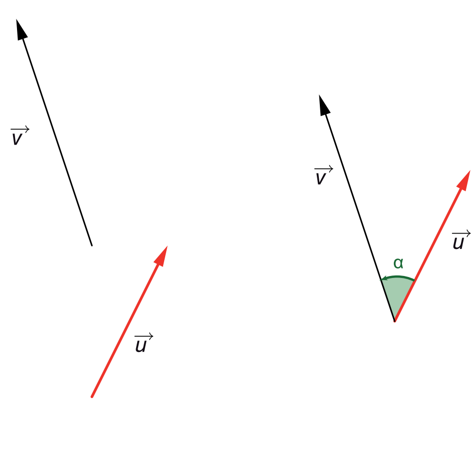


Figura 10

Con questa premessa, possiamo dare la seguente definizione.

Si chiama **prodotto scalare** di due vettori *non nulli* $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e si indica con $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (che si legge «$\vec{u}$ scalare $\vec{v}$»), il numero reale che si ottiene moltiplicando il prodotto dei moduli dei due vettori per il coseno dell'angolo α da essi formato:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = uv\cos\alpha$$

Se almeno uno dei due vettori è nullo, allora il loro prodotto scalare è zero, cioè:

$$\vec{0} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{0} = 0$$

Il termine «scalare» indica che il risultato dell'operazione è un numero.

Questo numero è positivo, negativo o nullo a seconda che l'angolo dei due vettori sia, rispettivamente, acuto, ottuso o retto.

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà.

- *Proprietà commutativa*: $u \cdot v = v \cdot u$

Il prodotto scalare non dipende dal segno dell'angolo dei due vettori, essendo $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$.

- *Proprietà associativa*: se $a \in \mathbb{R}$, $(a\vec{u}) \cdot \vec{v} = a(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- *Condizione di ortogonalità*: dati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ non nulli, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ se e solo se $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- *Quadrato scalare di un vettore*: $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = u^2$
- *Proprietà distributiva del prodotto scalare rispetto all'addizione di vettori*: $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$

6 Espressione analitica del prodotto scalare

Consideriamo due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy di versori fondamentali $\vec{i}$ e $\vec{j}$:

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} \qquad \vec{v} = c\vec{i} + d\vec{j}$$

Il prodotto scalare $\vec{u} \cdot \vec{v}$ è dato dall'espressione:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd}$$

Questa è l'espressione analitica del prodotto scalare di due vettori in funzione delle loro coordinate cartesiane, che possiamo così enunciare:

il prodotto scalare di due vettori è dato dalla somma del prodotto delle prime coordinate dei vettori con il prodotto delle seconde coordinate dei vettori.

ESEMPI

1 Dati i vettori $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ e $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$, calcoliamo il loro prodotto scalare.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd = 3 \cdot 1 + 2(-1) = 1$$

2 Proviamo che i vettori $\vec{u} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ e $\vec{v} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$ sono perpendicolari.
Si ha:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd = 3 \cdot 5 + 5(-3) = 0$$

Coseno dell'angolo di due vettori

La formula trovata permette di determinare facilmente l'angolo α tra due vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$. Infatti, se:

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} \qquad \vec{v} = c\vec{i} + d\vec{j}$$

si ha:

(1) $$\vec{u} \cdot \vec{v} = uv\cos\alpha \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$$

e, tenendo presente che $u = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $v = \sqrt{c^2 + d^2}$, dalle (1) ricaviamo:

$$\cos\alpha = \frac{ac + bd}{uv} = \frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}}$$

ESEMPIO

Determiniamo l'angolo convesso tra i vettori $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ e $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$.

Abbiamo: $u = \sqrt{13}$ $\qquad v = \sqrt{2}$ $\qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = 3 - 2 = 1$

da cui: $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{26}} \rightarrow \alpha \simeq 79°$

7 Prodotto vettoriale

Il *prodotto vettoriale* si definisce tra vettori nello **spazio** nel modo seguente.

Si chiama **prodotto vettoriale** del vettore $\vec{u}$ per il vettore $\vec{v}$, e si indica con:

$$\vec{u} \times \vec{v}$$

(che si legge «u vettoriale v»), il vettore $\vec{w}$ che ha:

- il modulo uguale al numero che si ottiene moltiplicando il prodotto dei moduli dei due vettori per il seno dell'angolo α da essi formato:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

- la direzione coincidente con quella della perpendicolare al piano determinato dai due vettori (*fig. 11*);

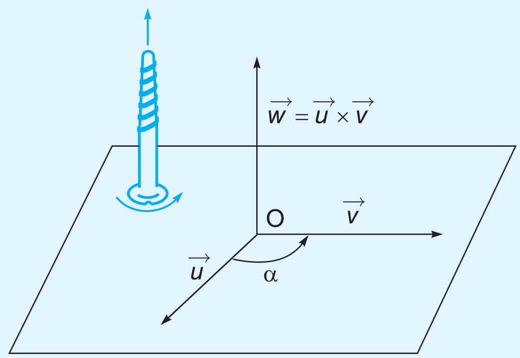


Figura 11

- il verso definito nel modo seguente (**regola della vite**). Immagina una vita destrorsa che si avviti ruotando nello stesso senso della rotazione che il vettore $\vec{u}$ deve compiere per assumere la stessa direzione di $\vec{v}$, descrivendo l'angolo convesso α. Il verso di $\vec{w}$ è quello secondo cui tale vite avanza.

Se poi $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono paralleli, o se uno di essi è nullo, per definizione, si pone:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$$

Dalla definizione di prodotto vettoriale, si può osservare che esso *non* gode della proprietà commutativa; infatti, si ha:

$$\boxed{\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})}$$

cioè: *scambiando l'ordine dei fattori il prodotto vettoriale cambia verso.*

Si dimostra invece che *il prodotto vettoriale gode della proprietà distributiva rispetto all'addizione dei vettori*, cioè:

$$\boxed{(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}}$$

ESEMPIO

Il vettore $\vec{u}$, di modulo 5, forma un angolo di 30° con il semiasse positivo delle x e il vettore $\vec{v}$, di modulo 4, ha direzione e verso del semiasse positivo delle y. Determiniamo il vettore $\vec{u} \times \vec{v}$.
L'angolo α tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ha ampiezza:

$$\alpha = 60°$$

La direzione è perpendicolare al piano xy e il verso si ottiene con la regola della vite, immaginando che l'asse x ruoti per sovrapporsi all'asse y.
Inoltre:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = u \cdot v \cdot \text{sen}\,\alpha = 5 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

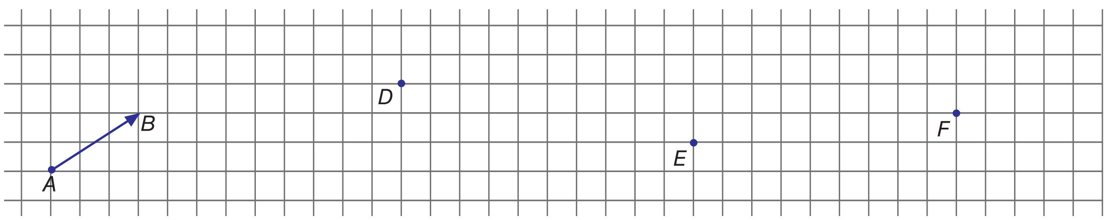
Esercizi

Definizione di vettore; addizione tra vettori; prodotto di un vettore per un numero reale

1 Indica se le seguenti grandezze sono vettoriali o scalari.

	Grandezza scalare	Grandezza vettoriale
Il peso di una cassa di mele	☐	☐
La temperatura corporea	☐	☐
L'accelerazione di un'automobile	☐	☐
La trazione esercitata da un cane che tira il guinzaglio	☐	☐
La pressione atmosferica	☐	☐
La tensione ai poli di una pila	☐	☐
La velocità di scorrimento dell'acqua di un fiume	☐	☐
La massa del Sole	☐	☐

2 Disegna i segmenti orientati equipollenti al segmento $\overrightarrow{AB}$ e aventi origine nei punti D, E, F.



3 Scegli il completamento corretto. La somma di due vettori si ottiene:

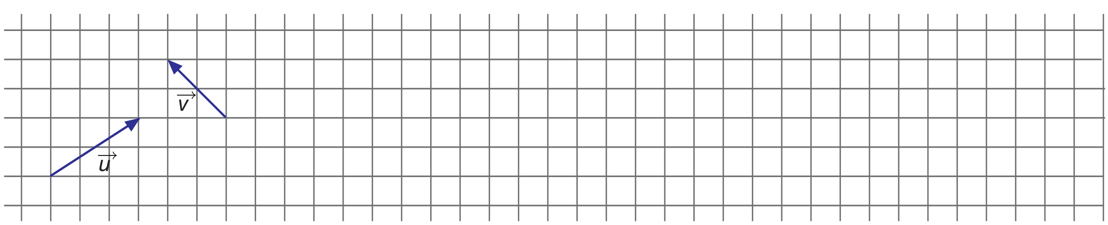
a) sommando i moduli dei vettori

b) sommando i moduli dei vettori, se questi hanno la stessa direzione

c) con la regola del parallelogrammo, se i vettori non hanno uguale direzione

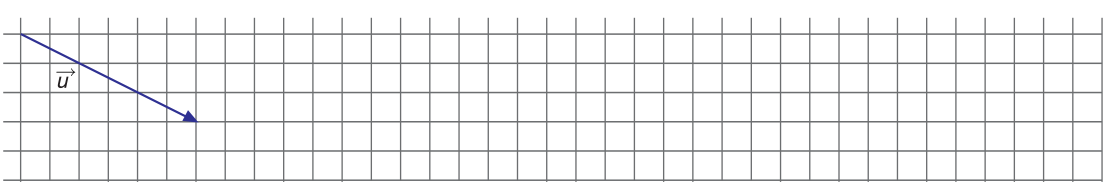
d) sommando i moduli dei vettori, se questi hanno uguale direzione e verso

4 Disegna il vettore somma $\overrightarrow{w}$ e il vettore differenza $\overrightarrow{d}$ dei vettori $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$:



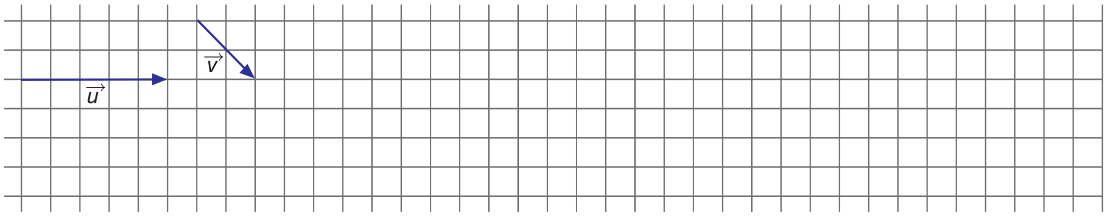
5 Dato il vettore $\overrightarrow{u}$, costruisci i vettori:

$$\frac{5}{6}\overrightarrow{u} \qquad 0\overrightarrow{u} \qquad -2\overrightarrow{u} \qquad -\overrightarrow{u}$$

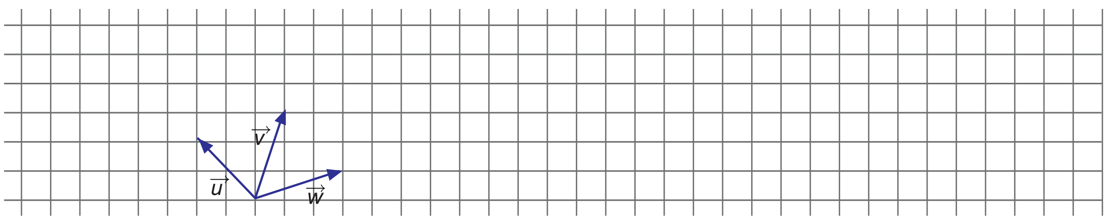


6 Dato il vettore $\vec{u}$, costruisci i vettori:

$$\vec{u}+\vec{v} \qquad \vec{u}-\vec{v} \qquad -\frac{4}{5}\vec{u}+\vec{v} \qquad 2\vec{u}-\frac{3}{2}\vec{v}$$



7 Una slitta è trainata da tre renne, ciascuna delle quali la tira con una forza rappresentata rispettivamente dai vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Disegna il vettore $\vec{F}$ che indica la forza risultante che agisce sulla slitta.



8 Siano $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ due vettori e sia OC una mediana del triangolo OAB. Dimostra geometricamente che $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.

Versori e scomposizione cartesiana di un vettore

9 Sia $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ il vettore del piano xOy di componenti $v_x=-3$; $v_y=5$ e sia $A(2\,;\,-1)$. Determina le coordinate di B.

ESERCIZIO SVOLTO

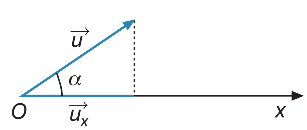
10 Determiniamo la proiezione del vettore $\vec{u}$ sull'asse x, conoscendo il modulo u e l'angolo α formato dal vettore con il semiasse positivo delle x.

a) u, α b) $u=6$, $\alpha=30°$

Abbiamo:

a) $u_x=u\ \cos\alpha$

b) $u_x=6\cdot\cos 30°=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$



11 Determina le componenti del vettore $\vec{v}$ di cui sono noti il modulo v e l'ampiezza dell'angolo α formato da $\vec{v}$ con il semiasse positivo delle ascisse.

a) $v=2 \quad \alpha=120°$ b) $v=4 \quad \alpha=150°$ c) $v=1 \quad \alpha=60°$

12 Calcola il modulo del vettore $\vec{v}$ sapendo che v_x è la sua proiezione sull'asse x e l'angolo tra $\vec{v}$ e la direzione positiva dell'asse x è α.

a) $v_x=-5 \quad \alpha=120°$ b) $v_x=3 \quad \alpha=45°$

13 Nel piano cartesiano il vettore $\vec{v}$ forma con l'asse x l'angolo $\alpha = 60°$ e la sua componente secondo l'asse x è $v_x = 6$; determina il modulo del vettore e la sua componente secondo l'asse y. $[12;\ 6\sqrt{3}]$

14 Nel piano cartesiano il vettore $\vec{v}$ ha le componenti $v_x = 3\sqrt{3}$ e $v_y = 3$; determina il suo modulo e l'angolo che esso forma con l'asse x. $[6;\ 30°]$

Siano $\vec{u} = (5\,;\,-3)$ e $\vec{v} = (-10\,;\,9)$. Esegui le seguenti operazioni.

15 $\vec{u} + \vec{v}$ $\qquad$ $\vec{u} - \vec{v}$

16 $\dfrac{1}{3}\vec{u} + \dfrac{1}{9}\vec{v}$ $\qquad$ $\dfrac{2}{5}\vec{u} - \dfrac{1}{3}\vec{v}$

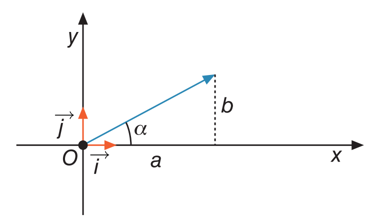
Determina il modulo e la direzione dei seguenti vettori.

ESERCIZIO SVOLTO

17 a) $\vec{u} = \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$

In ogni caso, il modulo di $\vec{u} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$ è dato da $u = \sqrt{a^2 + b^2}$,

e la direzione dall'angolo α, che ha $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a}{u} \\ \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{b}{u} \end{cases}$



Abbiamo quindi:

a) $u = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2,\qquad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \alpha = 60°$

18 a) $\vec{u} = 12\,\vec{i}$ $\qquad$ b) $\vec{u} = -2\,\vec{i} - 2\sqrt{3}\,\vec{j}$ $\qquad$ c) $\vec{u} = 5\,\vec{i} + 5\,\vec{j}$

$[\text{a) } u = 12,\ \alpha = 0°;\ \text{b) } u = 4,\ \alpha = 240°;\ \text{c) } u = 5\sqrt{2},\ \alpha = 45°]$

Prodotto scalare e prodotto vettoriale

19 Calcola il prodotto scalare tra i vettori $\vec{v} = (-3\,;\,2)$ e $\vec{w} = (5\,;\,6)$ e poi tra i vettori $\vec{a} = (2\,;\,-5)$ e $\vec{b} = (10\,;\,4)$. Come sono tra loro i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$? $[-3;\ 0]$

20 Dopo aver calcolato il prodotto scalare tra $\vec{v} = (3\,;\,4)$ e $\vec{w} = (-4\,;\,3)$, deduci che i due vettori sono perpendicolari.

21 Calcola i seguenti prodotti scalari, individuando le coppie di vettori perpendicolari:

a) $\left(\sqrt{2}\,\vec{i} - 3\,\vec{j}\right) \cdot \left(-\sqrt{8}\,\vec{i} + 2\,\vec{j}\right)$

b) $\left(3\,\vec{i} + 6\,\vec{j}\right) \cdot \left(2\,\vec{i} - \vec{j}\right)$

c) $\left(\vec{i} + 2\,\vec{j}\right) \cdot \left(2\,\vec{i} + \vec{j}\right)$ $\qquad$ [a) -10; b) 0 (i vettori sono perpendicolari); c) 4]

22 Calcola l'ampiezza dell'angolo formato tra i due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nei seguenti casi:

a) $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} \quad \vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ b) $\vec{u} = -\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j} \quad \vec{v} = \sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}$

c) $\vec{u} = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\vec{i} + \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\vec{j} \quad \vec{v} = \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\vec{i} + \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\vec{j}$

[a) 90°; b) 120°; c) 60°]

23 Due vettori hanno moduli, rispettivamente, $u = 10$ e $v = 2$.
Sapendo che $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$, calcola $|\vec{u} \times \vec{v}|$. [16]

24 I due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ formano un angolo di 150° e il modulo di $\vec{a}$ è 8. Sapendo che il prodotto vettoriale $\vec{a} \times \vec{b}$ ha modulo 6, calcola il modulo di $\vec{b}$. $\left[\frac{3}{2}\right]$