Matrici

- Nozioni fondamentali
- Algebra delle matrici
- Determinanti di matrici quadrate

Nozioni fondamentali

1 Definizioni

DEFINIZIONE MATRICE

Detti m ed n due numeri interi positivi e considerati $m \cdot n$ numeri reali, si chiama **matrice** (*rettangolare*) *di tipo* (m, n) l'insieme degli $m \cdot n$ numeri considerati, disposti ordinatamente su m righe e su n colonne, come nello schema che segue:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

I numeri reali racchiusi nella tabella si dicono *elementi* della matrice e sono rappresentati da una lettera munita di due indici: il primo indice fornisce la riga a cui appartiene l'elemento e il secondo la colonna. Ad esempio, l'elemento a_{32} si trova all'incrocio tra la terza riga e la seconda colonna; le righe e le colonne si contano rispettivamente a partire dall'alto e da sinistra, come è naturale.
Le matrici si indicano di solito con lettere maiuscole e si scrive, sinteticamente,

$$A = [a_{ik}] \quad \text{con} \quad i = 1,\ 2,\ ...,\ m; \qquad k = 1,\ 2,\ ...,\ n$$

Se $m = n$ si ha una **matrice quadrata** (di ordine n).

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \sqrt{3} \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & \sqrt{11} & 0 \end{bmatrix}$$

sono rispettivamente una matrice rettangolare di tipo $(2,\ 3)$ e una matrice quadrata di ordine 3. Con ovvio significato dei simboli si ha, ad esempio: $a_{22} = 3$, $a_{13} = \sqrt{3}$, $b_{12} = 0$, $b_{32} = \sqrt{11}$, ...

DEFINIZIONI MATRICE RIGA, MATRICE COLONNA

Si chiama **matrice riga** o **vettore riga** una matrice di ordine $(1,\ n)$, cioè formata da una sola riga; si chiama **matrice colonna** o **vettore colonna** una matrice di ordine $(m,\ 1)$, cioè formata da una sola colonna.

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

DEFINIZIONE MATRICE NULLA

La **matrice nulla** o **matrice zero** è la matrice i cui elementi sono tutti uguali a zero; si indica con

$$Z = [z_{ik}], \; z_{ik} = 0 \quad \text{con} \quad i = 1, \; 2, \; ..., \; m; \quad k = 1, \; 2, \; ..., \; n$$

DEFINIZIONE MATRICI UGUALI

Due matrici dello stesso tipo sono **uguali**, e scriveremo $A = B$, se hanno uguali tutti gli elementi corrispondenti.

DEFINIZIONE MATRICE OPPOSTA

La **matrice opposta** di A, che viene indicata con il simbolo $-A$, è la matrice, dello stesso tipo di A, i cui elementi sono gli opposti dei corrispondenti elementi di A.

DEFINIZIONE MATRICE TRASPOSTA

Data una matrice A di tipo $(m, \; n)$ si definisce **trasposta** di A, e si indica con A_T, la matrice di tipo $(n, \; m)$ che si ottiene da A scambiando ordinatamente le righe con le colonne.

È del tutto evidente che $(A_T)_T = A$, cioè la trasposta della trasposta di A, è la stessa matrice A.

ESEMPIO

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

si ha

$$-A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}; \quad A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (A_T)_T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = A$$

2 Diagonale principale e diagonale secondaria di una matrice quadrata

DEFINIZIONI DIAGONALE PRINCIPALE, DIAGONALE SECONDARIA

Se A è una matrice quadrata di ordine n, si chiama **diagonale principale** di A l'insieme degli elementi $a_{11}, a_{22}, \; ..., a_{nn}$ che hanno i due indici uguali.
La **diagonale secondaria** di A è l'insieme degli elementi $a_{1n}, a_{2,\, n-1}, ..., a_{n1}$ i cui indici hanno per somma $n + 1$.

ESEMPIO

Consideriamo la seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 1/2 \\ 2 & 0 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

diagonale secondaria

diagonale principale

Si tratta di una matrice quadrata di ordine 4. La sua diagonale principale è costituita dagli elementi 1, –1, 5, 2, mentre la sua diagonale secondaria ha per elementi 5, 1, 0, –2.

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

3 Matrici diagonali e triangolari. Matrice unità

DEFINIZIONE MATRICE DIAGONALE

Si dice che una matrice quadrata è **diagonale** se sono nulli tutti i suoi elementi tranne quelli che costituiscono la diagonale principale.

DEFINIZIONE MATRICE TRIANGOLARE

Una matrice quadrata si dice **triangolare superiore** se tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale sono nulli.
Una matrice quadrata è detta **triangolare inferiore** se tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale sono nulli.

DEFINIZIONE MATRICE UNITÀ

Si chiama **matrice unità** o **matrice identica** (di ordine n) quella matrice diagonale i cui elementi, sulla diagonale principale, sono tutti uguali a 1.

Indicheremo la matrice unità con il simbolo I o, eventualmente, I_n per specificarne l'ordine.

ESEMPIO

Delle seguenti matrici A è una matrice diagonale di ordine 3, B è triangolare superiore di ordine 4 e I_4 è la matrice unità di ordine 4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Algebra delle matrici

4 Somma delle matrici

Consideriamo ora l'operazione di addizione tra matrici, la cui definizione è molto intuitiva.

DEFINIZIONE SOMMA DI MATRICI

Si definisce **somma** di due matrici A e B dello stesso tipo (ossia con lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne), la matrice, dello stesso tipo di A e di B, i cui elementi sono la somma dei corrispondenti elementi delle matrici date. Tale matrice somma viene indicata con $A + B$.

La **differenza** di due matrici si può definire come somma della prima matrice con l'opposto della seconda: $A - B = A + (-B)$.

ESEMPIO

Se è $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, risulta

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+1 & -1+0 \\ 0+2 & -5+3 & 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

e

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-3 & 3-1 & -1-0 \\ 0-2 & -5-3 & 4-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

5 Prodotto di una matrice per uno scalare

Anche la definizione di prodotto di una matrice per uno scalare è intuitiva.

DEFINIZIONE PRODOTTO DI UNA MATRICE PER UNO SCALARE

Si chiama **prodotto della matrice** A **per uno scalare** α (cioè per il numero reale α) la matrice che si ottiene da A moltiplicando tutti i suoi elementi per α.

ESEMPIO

Sia $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$. Risulta: $2A = 2\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$; $\frac{1}{3}A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

6 Prodotto scalare di una matrice riga per una matrice colonna

Affrontiamo adesso la definizione del prodotto tra matrici che, come vedremo, è alquanto laboriosa. Per prima cosa è necessario introdurre il prodotto di una matrice riga per una matrice colonna. Consideriamo nell'ordine una matrice riga A di tipo $(1,\ s)$ e una matrice colonna B di tipo $(s,\ 1)$:

$$A = [a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1s}] \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{s1} \end{bmatrix}$$

Definiamo **prodotto scalare** di A per B la matrice P di tipo $(1,\ 1)$ che ha per elemento il numero che si ottiene sommando i prodotti del tipo $a_{1j}\ b_{j1}$ con $j = 1, 2, \dots, s$. Osserviamo che tale matrice è costituita da un solo numero, cioè è uno scalare.

$$P = A \cdot B = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1s}b_{s1}] = \left[\sum_{j=1}^{s} a_{1j}b_{j1}\right]$$

NOTA BENE

$\sum_{j=1}^{s} a_{1j}\, b_{j1}$ si legge "sommatoria per j che va da 1 a s di $a_{1j}\, b_{j1}$".

ESEMPIO

Date le matrici $A = [1 \quad 2 \quad 4]$ e $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, si ottiene

$$P = A \cdot B = [1 \quad 2 \quad 4] \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = [1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2] = [21]$$

7 Prodotto di matrici

Siano A una matrice di tipo $(m,\ s)$ e B una matrice di tipo $(s,\ n)$. Le due matrici siano dunque tali che il numero delle colonne della prima sia uguale al numero delle righe della seconda (*matrici conformabili rispetto alla moltiplicazione*).

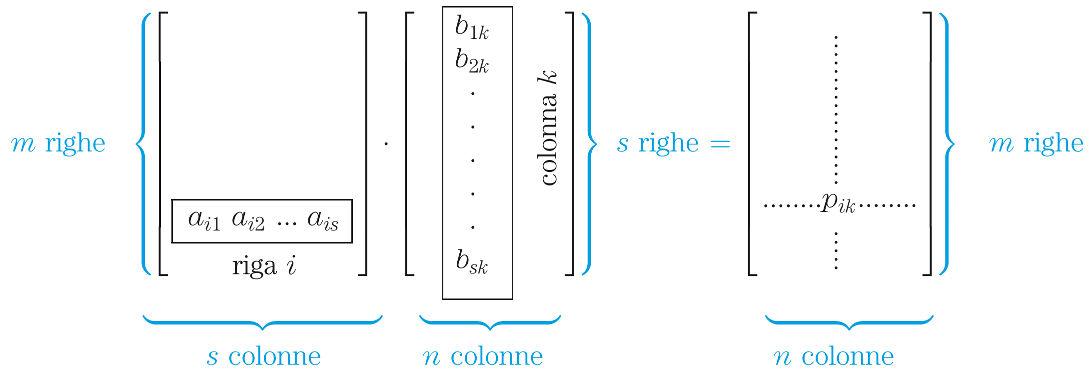
© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

Si definisce **prodotto** (*righe per colonne*) della matrice A di tipo $(m,\ s)$ per la matrice B di tipo $(s,\ n)$ la matrice P di tipo $(m,\ n)$ il cui generico elemento p_{ik} si ottiene moltiplicando scalarmente la i-esima riga di A per la k-esima colonna di B:

$$P = A \cdot B = [p_{ik}] = \left[\sum_{j=1}^{s} a_{ij} b_{jk}\right],$$

con $i = 1,\ 2,\ \dots,\ m$ e $k = 1,\ 2,\ \dots,\ n$

Schematicamente si ha



Osserviamo che il punto che indica il prodotto tra matrici può anche essere omesso, come si usa fare con il punto che indica il prodotto tra numeri. Si noti, inoltre, che potrebbe essere definito il prodotto colonne per righe di matrici di tipo $(s,\ m)$ per matrici di tipo $(n,\ s)$.

ATTENZIONE!

Il prodotto righe per colonne tra matrici si può effettuare solo se il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda.

ESEMPIO

Calcoliamo il prodotto delle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che le due matrici sono conformabili rispetto alla moltiplicazione essendo A di tipo $(3,\ 2)$ e B di tipo $(2,\ 4)$. La matrice prodotto P sarà quindi di tipo $(3,\ 4)$. Calcoliamo dunque i 12 elementi di P; l'elemento p_{11} sarà il prodotto scalare della prima riga di A per la prima colonna di B, l'elemento p_{12} sarà il prodotto scalare della prima riga di A per la seconda colonna di B e così via...:

$$p_{11} = [2\ \ 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 6; \quad p_{12} = [2\ \ 1]\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 7; \quad \text{ecc.}$$

Proseguendo in questo modo, possiamo calcolare gli altri elementi della matrice prodotto e verificare che si ottiene

$$P = A \cdot B = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 9 & 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

8 Proprietà delle operazioni

Le operazioni ora definite godono delle seguenti proprietà.

1. **Proprietà distributiva del prodotto di una matrice per uno scalare rispetto alla somma di matrici:**

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

2. **Proprietà distributiva del prodotto di una matrice per uno scalare rispetto alla somma di scalari:**

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$$

3. **Proprietà associativa del prodotto di una matrice per uno scalare:**

$$(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$$

4. **Prodotto per 1 e per -1:**

$$1\cdot A=A;\quad (-1)\cdot A=-A$$

5. **Proprietà commutativa della somma:**

$$A+B=B+A$$

6. **Proprietà associativa della somma e del prodotto:**

$$A+(B+C)=(A+B)+C;\quad A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$$

7. **Proprietà distributive (sinistra e destra) del prodotto rispetto alla somma:**

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C;\quad (B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A$$

Le proprietà dalla **1** alla **5** e la prima delle **6** sono conseguenza immediata delle proprietà delle operazioni aritmetiche.
È importante rilevare che **il prodotto tra matrici non gode della proprietà commutativa**, ossia, in generale è $A\cdot B\neq B\cdot A$ (si veda il successivo **ESEMPIO 1**). Ciò non esclude che in casi particolari sia $A\cdot B=B\cdot A$.
Per tale motivo è necessario formulare due proprietà distributive distinte: infatti, in mancanza della proprietà commutativa del prodotto, non è lecito dedurre l'una dall'altra.

Inoltre, **non vale per le matrici la legge di annullamento del prodotto**, ossia il prodotto di due matrici può essere la matrice nulla senza che nessuno dei fattori sia la matrice nulla (**ESEMPIO 2**).
Infine la **matrice unità**, definita al **PARAGRAFO 3**, è **elemento neutro rispetto al prodotto**, ossia non muta le matrici con cui viene moltiplicata:

$$A\cdot I_n=A;\quad I_n\cdot B=B$$

ESEMPI

1 Verifichiamo con un esempio che il prodotto di matrici non gode della proprietà commutativa.

Consideriamo le matrici $A=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3&0\\1&2\end{bmatrix}$

Si ha $$A\cdot B=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-3&0\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&-2\\13&8\end{bmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}-3&0\\1&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&-1\\-3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&3\\-4&7\end{bmatrix}$$

e quindi è $A\cdot B\neq B\cdot A$.
Ricordiamo però che, *in casi particolari*, può risultare $A\cdot B=B\cdot A$. Possiamo verificare che ciò accade, ad esempio, se A e B sono matrici diagonali dello stesso ordine.

2 Si ha $\begin{bmatrix}1&2\\-\frac{1}{2}&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1\\0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$. Si verifica così che il prodotto di due matrici, nessuna delle quali è la matrice nulla, può essere la matrice nulla: per il prodotto tra matrici non vale la legge di annullamento del prodotto.

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

3 Siano A, B, C le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo $A \cdot C + B \cdot C$ e verifichiamo che risulta uguale a $(A + B) \cdot C$ (proprietà distributiva destra del prodotto rispetto alla somma). Si ha

$$A \cdot C + B \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 & 4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(A + B) \cdot C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Si ha quindi $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

Si può verificare che è anche $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$.

9 Potenza di una matrice quadrata

Si può definire la **potenza n-esima di una matrice quadrata** nel modo seguente:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ volte}} \qquad (n \geq 2)$$

Determinanti di matrici quadrate

10 Definizione

A una matrice quadrata può essere associato un valore numerico, detto **determinante**, secondo le modalità che vedremo tra poco. Alle matrici rettangolari di tipo (m, n), con $m \neq n$, invece, non viene associato alcun valore numerico.

Sia dunque

$$A = [a_{ij}] \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

una *matrice quadrata* di ordine n. Il suo determinante verrà indicato con uno dei seguenti simboli

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ATTENZIONE!

Non confondere il simbolo di determinante con quello di modulo.

Nel caso particolare di matrice (quadrata) di ordine 1, cioè $A = [a_{11}]$, si pone

$$\det A = |A| = |a_{11}| = a_{11}$$

Nel caso delle matrici quadrate di ordine 2, il determinante si definisce nel seguente modo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

ESEMPI

1 Se $A = [-5]$ allora $|A| = -5$.

2 Se $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ allora $|B| = 3 \cdot (-4) - (-2) \cdot 1 = -10$

3 Se $C = \begin{bmatrix} \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \end{bmatrix}$ allora $|C| = \text{sen}^2\alpha - (-\cos^2\alpha) = \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

4 Risolvere l'equazione

$$\begin{vmatrix} x & x-1 \\ x^2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante, si ottiene $2x - x^2(x-1) = 0$, ossia

$$x(2 - x^2 + x) = 0 \longrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 2$$

11 Minore complementare. Complemento algebrico

Per estendere la definizione di determinante a una matrice di ordine superiore al secondo, occorre premettere le seguenti definizioni.

DEFINIZIONE MINORE COMPLEMENTARE

Si dice **minore complementare** di un elemento di una matrice quadrata di ordine n il determinante che si ottiene sopprimendo dalla matrice data la riga e la colonna alle quali l'elemento appartiene.

Il minore complementare di un elemento di una matrice di ordine n risulta quindi un determinante di ordine $(n-1)$.

DEFINIZIONE COMPLEMENTO ALGEBRICO

Si dice **complemento algebrico** di un elemento a_{ik} di una matrice A di ordine n il minore complementare di a_{ik}, preceduto dal segno $+$ o dal segno $-$, a seconda che, rispettivamente, $(i+k)$ sia pari o dispari.

Per il complemento algebrico di a_{ik} useremo il simbolo A_{ik}. Avremo così che A_{ik} è il prodotto del minore complementare dell'elemento a_{ik} per $(-1)^{i+k}$.

ESEMPIO

Se è $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, si ha $A_{11} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = +1$; $A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$; $A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 11$; ...

12 Determinanti del terzo ordine

DEFINIZIONE DETERMINANTE DI UNA MATRICE DEL TERZO ORDINE

Il **determinante di una matrice del terzo ordine** è la somma dei prodotti degli elementi di una riga o di una colonna *qualsiasi* per i rispettivi complementi algebrici.

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

La definizione appena data ha significato in quanto, come si potrebbe verificare facilmente, il valore numerico ottenuto è indipendente dalla riga o dalla colonna scelta.

ESEMPIO

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ si ha, sviluppando secondo la terza colonna,

$$|A| = +3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3(-3) - 2(-2+3) + 4 \cdot 2 = -3$$

Se si sviluppa secondo la prima colonna, si ha

$$|A| = +2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(4+2) + 3(-2-3) = -3$$

Si noti che, sviluppando secondo la riga o la colonna con il maggior numero di zeri, i calcoli sono semplificati.

13 Regola di Sarrus

Applicando la definizione formulata nel precedente paragrafo, si ha

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Si può verificare che si ottiene la medesima espressione sviluppando il determinante secondo una riga o una colonna qualsiasi.

La formula precedente può essere facilmente ricordata mediante il seguente schema che costituisce la **regola di Sarrus** (valida *solo* per i determinanti del 3° ordine):

$$\begin{array}{ccccccc} + & + & + & - & - & - \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

A destra della matrice data si riscrivono, di seguito e nell'ordine, la prima e la seconda colonna; si calcola il prodotto degli elementi della diagonale principale della matrice e quello degli elementi delle due diagonali parallele; lo stesso si fa con la diagonale secondaria e le sue parallele, ma prendendo, questa volta, i prodotti con il segno cambiato: la somma algebrica dei sei prodotti fornisce il determinante.

ESEMPIO

Calcolare, con la regola di Sarrus, il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{array}$$

Si ottiene

$$|A| = -4 - 4 - 6 + 6 - 1 - 16 = -25$$

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

14 Determinanti di ordine *n*

Il procedimento seguito per definire un determinante del terzo ordine vale anche per determinanti di ordine superiore; si può infatti dire che *il determinante di una qualsiasi matrice di ordine n è dato dalla somma dei prodotti degli elementi di una linea qualsiasi (riga o colonna) per i rispettivi complementi algebrici.*

Si noti che, in tale definizione, rientra anche il caso del determinante del secondo ordine.

Per ricordare il segno che compete a ciascun complemento algebrico, si può ricorrere alla cosiddetta *regola della scacchiera*.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

È importante rilevare che, come già osservato nel **PARAGRAFO 12** per i determinanti del terzo ordine, anche nel caso dei determinanti di ordine n la scelta della riga, o colonna, non influenza il risultato.

In particolare, scambiando tra loro le righe con le colonne, il determinante non cambia, cioè $|A_T| = |A|$. È ovvio infatti che sviluppare $|A_T|$, ad esempio, secondo la riga i-esima, equivale a sviluppare $|A|$ secondo la colonna i-esima.

OSSERVAZIONE

Ovviamente, matrici diverse possono avere lo stesso determinante.

ESEMPIO

Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Conviene sviluppare il determinante secondo la prima colonna, che è la linea che contiene il maggior numero di zeri:

$$|A| = -1\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

I due determinanti del terzo ordine si possono calcolare con la regola di Sarrus:

$$|A| = -1(21 + 4 + 20 - 1 - 30 - 56) - 3(4 + 8 + 0 - 0 - 1 - 12) = 45$$

15 Proprietà dei determinanti

I determinanti delle matrici quadrate godono delle seguenti proprietà.

1. **Se tutti gli elementi di una linea sono nulli, il determinante è zero.**
2. **Il determinante della matrice unità, I_n, di qualsiasi ordine, è 1.**
3. **Moltiplicando tutti gli elementi di una linea per uno scalare k, il determinante della matrice viene moltiplicato per k.**
4. **Se in una matrice una riga (o una colonna) è la somma di due matrici riga (o matrici colonna), il suo determinante è la somma dei due determinanti che si ottengono sostituendo a quella riga (o colonna) rispettivamente le due matrici riga (o matrici colonna) di cui è somma.**
5. **Se una matrice ha due linee uguali, o proporzionali, il suo determinante è zero.**

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

6. **Se si scambiano tra loro due righe (o due colonne) di una matrice, il determinante cambia segno.**
7. **Se agli elementi di una linea si sommano gli elementi di un'altra linea a essa parallela, tutti moltiplicati per uno stesso numero, il determinante non cambia.**
8. **Il determinante del prodotto di due matrici è il prodotto dei loro determinanti (TEOREMA DI BINET).**
9. **Se una linea è combinazione lineare di due o più altre linee a essa parallele, il determinante è nullo.**

OSSERVAZIONE

Precisiamo che una linea si dice *combinazione lineare* di due o più altre linee date, se i suoi elementi si ottengono sommando gli elementi corrispondenti delle linee date, dopo aver moltiplicato gli elementi di ciascuna di tali linee per un numero. Questi numeri si dicono *coefficienti* della combinazione lineare.
Ad esempio, nella seguente matrice quadrata di ordine 3 la terza riga è combinazione lineare della prima e della seconda riga, rispettivamente secondo i coefficienti h e k:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ ha+ka' & hb+kb' & hc+kc' \end{bmatrix}$$

16 Calcolo dei determinanti

Il calcolo di un qualunque determinante può essere notevolmente semplificato ricorrendo alla PROPRIETÀ 7. Infatti, applicandola ripetutamente, possiamo rendere nulli tutti gli elementi di una linea tranne uno. Il determinante così ottenuto può essere facilmente sviluppato secondo questa linea. In questo modo, il problema del calcolo di un determinante di ordine n viene ridotto al calcolo di un determinante di ordine $n-1$, a cui si può applicare ancora il procedimento descritto fino a giungere al calcolo di determinanti di ordine 2 o 3.

ESEMPI

1 Calcoliamo il seguente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 9 \\ -1 & 6 & -5 & -3 \end{vmatrix}$$

In questo caso notiamo che la quarta colonna è uguale alla prima moltiplicata per 3. Dunque, per la PROPRIETÀ 5, è

$$|A| = 0$$

OSSERVA CHE

il determinante è nullo se
- tutti gli elementi di una linea sono nulli;
- due linee parallele sono proporzionali;
- una linea è combinazione lineare di altre due o più ad essa parallele.

2 Calcolare il seguente determinante del quarto ordine:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

Applicando la **PROPRIETÀ 7**, addizioniamo agli elementi della prima riga quelli della terza moltiplicati per (-1), cioè sostituiamo alla prima riga la differenza tra la prima e la terza: il determinante non cambia; sommiamo poi agli elementi della terza colonna quelli della quarta moltiplicati per 2:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

Come si vede, si è fatto in modo di avere gli elementi della prima riga tutti nulli tranne l'ultimo; sviluppando ora il determinante, in base alla definizione, secondo la prima riga, si ottiene un determinante di ordine 3.
A esso possiamo ancora applicare la **PROPRIETÀ 7**, sommando alla prima riga la terza, il che equivale a sostituire alla prima riga la somma della prima e della terza:

$$|A| = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Sviluppiamo il determinante così ottenuto secondo la prima riga:

$$|A| = -1 \cdot 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -12(1+4) = -60$$

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

Esercizi

- **Nozioni fondamentali**
- **Algebra delle matrici**
- **Determinanti di matrici quadrate**

Nozioni fondamentali

RICORDIAMO LA TEORIA

- **Matrice di tipo (m, n)**: tabella formata da $m \cdot n$ elementi di $\mathbb{R}$ posti su m righe e n colonne. Si scrive $A = [a_{ik}] \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad k = 1, 2, \ldots, n$.
  Se $m = 1$ parliamo di **matrice riga**, se $n = 1$ di **matrice colonna**.
  Se $m = n$ la **matrice** è **quadrata di ordine n**.
- **Matrice nulla**: tutti i suoi elementi sono 0.
- **Matrici uguali**: matrici che hanno tutti gli elementi corrispondenti uguali
$$A = B \iff a_{ik} = b_{ik} \quad i = 1, \ldots, m \quad k = 1, \ldots, n$$
- **Matrice opposta di una matrice A**: matrice indicata con $-A$, i cui elementi sono gli opposti dei corrispondenti elementi di A.
- **Matrice trasposta della matrice A**: matrice indicata con A_T, che si ottiene da A scambiando le righe con le colonne.
- **Diagonale principale di una matrice quadrata**: insieme degli elementi che hanno i due indici uguali.
- **Diagonale secondaria di una matrice quadrata di ordine n**: insieme degli elementi i cui indici hanno per somma $n + 1$.
- **Matrice diagonale**: matrice quadrata i cui elementi al di fuori della diagonale principale sono nulli.
- **Matrice triangolare superiore (inferiore)**: matrice quadrata i cui elementi al di sotto (sopra) della diagonale principale sono nulli.
- **Matrice unità di ordine n**: matrice diagonale, indicata con I_n, i cui elementi sulla diagonale principale sono tutti uguali a 1.

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

È data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

1 Qual è l'elemento a_{32}?

a 3 **b** 4 **c** 5 **d** -2

2 Qual è l'elemento a_{13}?

a 2 **b** -3 **c** 0 **d** 3

3 Quali sono gli elementi della diagonale principale?

a $1;\ -1;\ -3$ **b** $0;\ -1;\ 2$ **c** $1;\ -2;\ 0$

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

COMPLETARE...

4 L'opposta di una matrice è quella matrice dello stesso tipo i cui elementi sono .... dei corrispondenti elementi della matrice data.

5 Una matrice si dice triangolare superiore se sono nulli tutti gli elementi ....

6 La matrice identica è una matrice .... di ordine n formata da n .... disposti sulla diagonale principale e n^2 − .... negli altri posti.

ESERCIZIO SVOLTO

7 Determina per quali valori di x, y, z la matrice $\begin{bmatrix} x+y & x-y-2 & 0 \\ 0 & x-y & y+z \\ x+3z & 0 & 2z \end{bmatrix}$ risulta diagonale.

Come sappiamo una matrice è diagonale quando gli elementi non appartenenti alla diagonale principale sono tutti nulli. Dovrà quindi essere:

$\begin{cases} x-y-2=0 \\ y+z=0 \\ x+3z=0 \end{cases}$ da cui risolvendo si ottiene $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$

Sostituendo nella matrice data i valori trovati, otteniamo $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ che è evidentemente una matrice diagonale.

8 Determina x e y in modo che siano uguali le due matrici

$A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ y^2 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2y-1 \\ x & 5 \end{bmatrix}$ $\left[x = 1 \wedge y = 1,\ A = B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\right]$

9 Determina x, y, z in modo che siano opposte le due matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1+x & 0 \\ z-2y & 3z-x \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -y-z & 0 \\ 4x+y & y+x \end{bmatrix}$$

$\left[x = 1 \ \wedge \ y = 3 \ \wedge \ z = -1, \quad A = -B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}\right]$

10 Determina x e y in modo che siano uguali le due matrici

$\begin{bmatrix} 1 & x^2+y & -3 \\ -2 & 5 & y-x \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & x-y^2 & -3 \\ -2 & 5 & x+y \end{bmatrix}$ $\left[\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}\right]$

11 Determina x e y in modo che siano opposte le matrici

$\begin{bmatrix} x+y-1 & 3 \\ -4 & 2 \\ 0 & x^2+y^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x-y+1 & -3 \\ 4 & -2 \\ 0 & -x^2+y^2 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}\right]$

12 Determina x, y e z in modo che la seguente matrice sia triangolare superiore.

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & x & 3-y \\ x+z & 0 & 2 & -5 \\ 0 & x+2y-1 & -3 & z^2 \\ 0 & 2y-3z & 0 & y \end{bmatrix}$ $\left[x = -\frac{1}{2} \wedge y = \frac{3}{4} \wedge z = \frac{1}{2}\right]$

13 Determina x e y in modo che sia diagonale la matrice

$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}x-3y & 0 \\ 3y-\frac{1}{2}x & x & 4y^2-x^2+2 \\ 0 & x^2-4y^2-2 & y \end{bmatrix}$ $\left[\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases}\right]$

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

14 Date le due matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2x+y \\ 3 & -2 \\ x+2y & 0 \\ -1 & 5-2z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3-z & -1 \\ 4-z & -2 & 0 & x+y \end{bmatrix}$$

determina x, y, z in modo che $A_T = B$. $[x = 1 \wedge y = 0 \wedge z = 2]$

15 Esistono valori di a per i quali le due matrici $A = \begin{bmatrix} 2a+1 & 1 \\ 3a+2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ a+7 & 3 \end{bmatrix}$ risultano uguali?

[no]

Algebra delle matrici

RICORDIAMO LA TEORIA

- **Somma** di due matrici A stesso tipo: matrice, indicata con $A + B$, i cui elementi sono la somma dei corrispondenti elementi delle matrici date.
- **Prodotto di una matrice A per uno scalare α**: matrice i cui elementi sono il prodotto di α per i corrispondenti elementi di A.
- **Prodotto scalare** di una matrice riga A di tipo $(1, s)$ per una matrice colonna B di tipo $(s, 1)$: matrice di tipo $(1, 1)$ che ha per elemento il numero che si ottiene sommando i prodotti del tipo $a_{1j}\, b_{j1}$ con $j = 1, \ldots, s$.
- **Prodotto righe per colonne** della matrice A di tipo (m, s) per la matrice B di tipo (s, n): matrice di tipo (m, n) il cui elemento generico è dato da $p_{ik} = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\, b_{jk} \quad i = 1, \ldots, m \quad k = 1, \ldots, n$.
- **Proprietà delle operazioni tra matrici**

Date le matrici A, B, C e gli scalari α, β, $\forall A, B, C$ e $\forall \alpha, \beta$, si ha:

1. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
4. $1 \cdot A = A$; $\quad (-1)A = -A$
5. $A + B = B + A$
6. $A + (B + C) = (A + B) + C$; $\quad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
7. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$; $\quad (B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$

VERO O FALSO?

16 Il prodotto di due matrici può essere una matrice nulla se e solo se una delle due matrici è una matrice nulla. V F

17 La somma di due matrici si può eseguire solo se le due matrici sono dello stesso tipo. V F

18 Il prodotto di due matrici si può eseguire solo se le due matrici sono dello stesso tipo. V F

19 L'addizione di matrici gode delle proprietà associativa e commutativa. V F

20 La moltiplicazione di matrici gode delle proprietà associativa e commutativa. V F

21 Il prodotto righe per colonne di due matrici è possibile solo se la prima matrice ha un numero di righe uguale al numero di colonne della seconda. V F

22 La moltiplicazione tra matrici diagonali è un'operazione commutativa. V F

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

23 Il prodotto $[2 \quad 0 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ è

a $[1]$ **b** $[-1]$ **c** $[2]$ **d** $[-2]$

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

24 Il prodotto delle matrici $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ è la matrice

a $\begin{bmatrix}0 & -6\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ **b** $\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 3 & 3\end{bmatrix}$ **c** $\begin{bmatrix}3 & 8\\ 0 & -4\end{bmatrix}$ **d** $\begin{bmatrix}-6 & 5\\ 0 & -4\end{bmatrix}$

COMPLETARE...

25 La differenza di due matrici è la somma della prima matrice con ....
....

26 La proprietà distributiva del prodotto di uno scalare per una matrice rispetto alla somma di matrici è espressa dalla seguente uguaglianza: $\alpha(A+B)=$.................... .

Siano *A*, *B*, *C* le seguenti matrici:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ -2 & -1 & 2\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

Calcola le seguenti espressioni

ESERCIZIO SVOLTO

27 $5A-3B$.

Ricordando la definizione di prodotto di una matrice per uno scalare e di differenza tra matrici possiamo scrivere:

$$5\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ -2 & -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 5 & -5\\ 15 & 0 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ -6 & -3 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -1 & 4\\ 21 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

28 $A+B$; $A-B$. $\left[\begin{bmatrix}3 & 3 & -4\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 5 & 1 & -1\end{bmatrix}\right]$

29 $A+B+C$; $A-B+C$. $\left[\begin{bmatrix}4 & 2 & -3\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix};\begin{bmatrix}2 & -2 & 3\\ 5 & 4 & 0\end{bmatrix}\right]$

30 $2A+B$; $3A-2B+C$. $\left[\begin{bmatrix}5 & 4 & -5\\ 4 & -1 & 4\end{bmatrix};\begin{bmatrix}5 & -2 & 4\\ 13 & 5 & 0\end{bmatrix}\right]$

---

31 Determina una matrice X tale che

$$2(A+B)=X+C$$

$\left[X=\begin{bmatrix}5 & 7 & -9\\ 2 & -5 & 5\end{bmatrix}\right]$

32 Determina una matrice X tale che

$$2(A+X)=C-B-A$$

$\left[X=\begin{bmatrix}-3 & -3 & \frac{7}{2}\\ -\frac{7}{2} & 2 & -2\end{bmatrix}\right]$

33 Calcola $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right]$

34 Determina x in modo che sia $\begin{bmatrix}x & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ $[x=2]$

35 Determina x e y in modo che sia $\begin{bmatrix}1 & -3\\ -3 & 9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & x\\ y & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $[x=3\wedge y=1]$

36 Sia $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$. Calcola A^2 e A^3. $\left[\begin{bmatrix}1 & -2\\ 6 & -3\end{bmatrix};\begin{bmatrix}-4 & -1\\ 3 & -6\end{bmatrix}\right]$

37 Verifica che $\begin{bmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

38 Determina x in modo che $\begin{bmatrix}6 & 4\\ x & -6\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $[x=-9]$

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

Considera le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

39 Calcola $A \cdot B$; $B \cdot A$. $\left[\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}\right]$

40 Calcola A^2; $B^2 - A \cdot B$. $\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & -15 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\right]$

41 Calcola $\frac{1}{2}A \cdot C - 3B \cdot C$. $\left[\begin{bmatrix} -\frac{43}{2} & -\frac{35}{2} \\ -\frac{41}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}\right]$

42 Calcola $A \cdot B \cdot C$; $C \cdot B \cdot A$. $\left[\begin{bmatrix} 14 & -8 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -10 & 32 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right]$

43 Determina una matrice X tale che sia $A \cdot X = B$. $\left[\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right]$

44 Calcola $A \cdot (B + C)$, $A \cdot B + A \cdot C$ e verifica che i risultati sono uguali.

45 Calcola $(B + C) \cdot A$, $B \cdot A + C \cdot A$ e verifica che i risultati sono uguali.

Considera le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

46 Calcola $A \cdot B$, $B \cdot A$ e verifica che $A \cdot B \neq B \cdot A$.

47 Verifica che $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

48 Verifica che $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

49 Verifica che $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

50 Verifica che $(A \cdot B)_T \neq A_T \cdot B_T$, mentre $(A \cdot B)_T = B_T \cdot A_T$.

51 Calcola A^2, B^2, C^2.

---

52 Calcola $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\right]$

53 Calcola $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ $[\begin{bmatrix} 1 & 8 & -1 \end{bmatrix}]$

54 Calcola $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}\right]$

55 Calcola $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 4 & 1 & 13 \\ -1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}\right]$

56 Calcola $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right]$

57 Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; calcola $A^2 = A \cdot A$ e $A^3 = A \cdot A^2$. $\left[\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\right]$

ATTENZIONE!

$A^n = A \cdot A^{n-1}$ $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Ricorda però che il prodotto di matrici non è commutativo.

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

58 Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix}$; calcola A^2 e A^3. $\left[(1+x^2)\begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix};\ (1+x^2)^2\begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix}\right]$

59 Date le matrici $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, verifica che è

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2$$

60 Determina x in modo che risulti $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -2 \\ 14 & 3 \end{bmatrix}$ $[x = 5]$

61 Determina x e y in modo che risulti

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & x+y & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & x \\ 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$ $[x = -11 \wedge y = 22]$

COMPLETARE...

62 Siano A una matrice di tipo $(m,\ n)$ e B una matrice di tipo $(n,\ p)$. Dimostra che $(AB)_T = B_T A_T$, ossia **la trasposta del prodotto di due matrici è il prodotto, in ordine inverso, delle loro trasposte**.
Cominciamo con l'osservare che la matrice AB, essendo il prodotto di una matrice di tipo $(m,\ n)$ con una di tipo $(n,\ p)$, è una matrice di tipo $(m,\ p)$ e quindi la sua trasposta $(AB)_T$ è di tipo ....; d'altra parte le matrici B_T e A_T sono rispettivamente di tipo .... e .... e quindi il loro prodotto $B_T A_T$ è di tipo .... Dunque le matrici $(AB)_T$ e $B_T A_T$ sono dello stesso tipo.
Poniamo $AB = C$ e $B_T A_T = D$. Occorre dimostrare che $C_T = D$, ossia che $c_{ki} = d_{ik}$.
L'elemento c_{ki} è il prodotto scalare della riga k della matrice A con la colonna i della matrice B, ossia

$$c_{ki} = [a_{k1} \quad a_{k2} \quad \dots \quad a_{kn}] \cdot \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \dots \\ b_{ni} \end{bmatrix} = a_{k1}b_{1i} + a_{k2}b_{2i} + \dots + a_{kn}b_{ni}$$

D'altra parte d_{ik} è il prodotto scalare della riga i della matrice B_T, ossia della .... della matrice B, con la colonna .... della matrice A_T, ossia .... della matrice A, quindi si ha:

$$d_{ik} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Si può dunque concludere che .... c.v.d.

Determinanti di matrici quadrate

RICORDIAMO LA TEORIA

- **Determinante** di una matrice quadrata A: si indica con $|A|$ e
  – se A è di ordine 1, $|A| = a_{11}$
  – se A è di ordine 2, $|A| = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$.
- **Minore complementare** di un elemento di una matrice quadrata: determinante della matrice che si ottiene sopprimendo dalla matrice data la riga e la colonna alle quali l'elemento appartiene.
- **Complemento algebrico** A_{ik} dell'elemento a_{ik}: minore complementare di a_{ik}, moltiplicato per $(-1)^{i+k}$.
- **Determinante** di una matrice di ordine n: somma dei prodotti degli elementi di una linea qualsiasi per i rispettivi complementi algebrici

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,A_{ik}$$

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

■ **Proprietà dei determinanti**:

A Il determinante è nullo se:
- tutti gli elementi di una linea sono nulli;
- due linee parallele sono proporzionali;
- una linea è combinazione lineare di altre due, o più, ad essa parallele.

B Il determinante della matrice unità di qualsiasi ordine è 1.

C Moltiplicando tutti gli elementi di una linea per uno scalare k, il determinante della matrice viene moltiplicato per k.

D Se in una matrice una riga (o una colonna) è la somma di due matrici riga (o matrici colonna), il suo determinante è la somma dei due determinanti che si ottengono sostituendo a quella riga (o colonna) rispettivamente le due matrici riga (o matrici colonna) di cui è somma.

E Se si scambiano tra loro due righe (o due colonne) di una matrice, il determinante cambia segno.

F Se agli elementi di una linea si sommano gli elementi di un'altra linea ad essa parallela, tutti moltiplicati per uno stesso numero, il determinante non cambia.

G Il determinante del prodotto di due matrici è il prodotto dei loro determinanti (**teorema di Binet**).

VERO O FALSO?

63 Per calcolare il determinante di una matrice si può sempre ricorrere alla regola di Sarrus. V F

64 Il determinante si definisce solo per le matrici quadrate. V F

65 Il determinante della somma di due matrici è la somma dei loro determinanti. V F

66 Il determinante del prodotto di due matrici è il prodotto dei loro determinanti. V F

67 Il determinante di una matrice è zero se e soltanto se la matrice è nulla. V F

68 Il determinante di una matrice è 1 se e solo se si tratta di una matrice unità. V F

69 Il determinante del prodotto di una matrice A per uno scalare k è il prodotto del determinante di A per k. V F

70 Una matrice diagonale e una triangolare superiore (o inferiore), aventi gli elementi della diagonale principale uguali, hanno lo stesso determinante. V F

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

71 Qual è il determinante della matrice $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$?

a -10 **b** -24 **c** 10 **d** 14 **e** -14

72 In quali dei seguenti casi il determinante di una matrice è sicuramente zero?

a Se una riga ha tutti gli elementi nulli
b Se una riga ha tutti gli elementi uguali tra loro
c Se due colonne sono uguali
d Se la matrice è triangolare
e Se gli elementi di una riga sono uguali ai corrispondenti elementi di una colonna
f Se gli elementi di una colonna sono tutti multipli di uno stesso intero k
g Se gli elementi della diagonale principale sono tutti nulli
h Se due colonne sono proporzionali

ESERCIZI SVOLTI

73 Calcola il seguente determinante $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

Utilizzando la regola di Sarrus, otteniamo

$15 + 0 + (-8) - 0 - 18 - 10 = -21$

$$
\begin{array}{cccccc}
+ & + & + & - & - & - \\
3 & -2 & 4 & 3 & -2 & \\
-1 & 1 & 3 & -1 & 1 & \\
0 & 2 & 5 & 0 & 2 &
\end{array}
$$

74 Calcola $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 9 & 1 \\ -6 & 3 & 9 & -3 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

Osservando che la terza riga è uguale alla prima moltiplicata per lo scalare -3, possiamo immediatamente concludere che il determinante della matrice è nullo.

Applicando le definizioni, calcola il valore dei seguenti determinanti.

75 $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ $[-11;\ 5]$

76 $\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{vmatrix}$ $[x-y;\ 0]$

77 $\begin{vmatrix} x+y & x-y \\ x-y & x+y \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} x & x-1 \\ x-2 & x-3 \end{vmatrix}$ $[4xy;\ -2]$

78 $\begin{vmatrix} x & x-a \\ x-2a & x-3a \end{vmatrix}$ $[-2a^2]$

79 $\begin{vmatrix} 34 & 55 & 89 \\ 144 & 233 & 377 \\ 610 & 987 & 1597 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ -5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$ $[0;\ -181]$

80 $\begin{vmatrix} 25 & 10 & 5 \\ 11 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$ $[-60;\ 0]$

81 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 13 & 21 \\ 34 & 55 & 89 & 144 \\ 233 & 377 & 610 & 987 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $[0;\ x-w]$

Applicando la regola di Sarrus, calcola i seguenti determinanti.

82 $\begin{vmatrix} -5 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 15 & 35 & 55 \\ 5 & 25 & 45 \\ -15 & 5 & 25 \end{vmatrix}$ $[27;\ 0]$

83 $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 30 & 40 & 50 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ $\left[-\frac{2}{3};\ (x-3)(x-4)\right]$

84 $\begin{vmatrix} 1 & a & 2a \\ 1 & b & 2b \\ 1 & c & 2c \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & a \\ 1 & ab & ab \end{vmatrix}$ $[0;\ (a-b)(a+b-2ab)]$

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

Applicando le proprietà studiate, calcola i seguenti determinanti.

85 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 10 & -1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ [0, infatti...; -18]

86 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 7 & 8 & -2 \\ 2 & -4 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & -8 & 2 & -1 & 1 \\ -5 & 10 & 7 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ [0, infatti...]

87 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 2a & 2b & 2c & 2d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ [0, infatti...; -60]

88 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 75 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{vmatrix}$ [$(a-1)(b-1)(b-a);\ 0$]

89 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \\ x & y & z \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ [0; 5]

90 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ [6; 7]

91 $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ d & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$ [$1-abcd;\ (x-1)^3(x+3)$]

92 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & y \\ 1 & x & y & 1 \\ 1 & y & x & 1 \\ y & 1 & 1 & x \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix}$ [$(x-y)^2(x+y+2)(x+y-2);\ 1+abcde$]

Risolvi le seguenti equazioni.

ESERCIZIO SVOLTO

93 $\begin{vmatrix} -x & 2x \\ 3-x & x+1 \end{vmatrix} = 0$

Per definizione di determinante abbiamo

$$-x(x+1) - 2x(3-x) = -x^2 - x - 6x + 2x^2 = x^2 - 7x = x(x-7)$$

da cui possiamo ricavare, per la legge di annullamento del prodotto, $x = 0 \vee x = 7$.

94 $\begin{vmatrix} x & 2x \\ 3x & 4 \end{vmatrix} = 0$ $\left[x = 0 \vee x = \dfrac{2}{3}\right]$

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

95 $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ $[x = -1]$

96 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & x & 1 \\ x & x & x \end{vmatrix} = 0$ $[x = 0 \ \vee \ x = 1]$

97 $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 1 & x & x & x \\ 0 & 2 & x & x \\ 0 & 0 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$ $[x = 0 \ \vee \ x = 1 \ \vee \ x = 2 \ \vee \ x = 3]$

Risolvi le seguenti disequazioni.

98 $\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 1 & x & x \\ x & 1 & x \end{vmatrix} \geq 0$ $\left[x \geq -\dfrac{1}{2}\right]$

99 $\begin{vmatrix} x & x & 1 & 1 \\ 1 & x & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x \\ x & 1 & 1 & x \end{vmatrix} < 0$ [impossibile]

100 $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ x & x & 1 \\ x & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{vmatrix} < 0$ $[x < 1 \ \vee \ x > 2]$

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

Laboratorio di matematica

Eseguire operazioni con le matrici usando il foglio elettronico

Utilizziamo il foglio elettronico per eseguire le operazioni tra matrici quadrate di ordine 2: somma, differenza, prodotto di due matrici; prodotto di una matrice per uno scalare; calcolo del determinante. In questa esercitazione facciamo riferimento a *Excel*, ma lo stesso procedimento può essere impiegato in altri fogli elettronici.

La tabella in **FIGURA 1** è una proposta di soluzione.

	A	B	C	D	E	F	G
1				**Operazioni con le matrici**			
2							
3				**Dati**			
4		**Matrice A**				**Matrice B**	
5		Colonna 1	Colonna 2			Colonna 1	Colonna 2
6	Riga 1	1	-3		Riga 1	-2	4
7	Riga 2	2	1		Riga 2	1	0
8							
9	Scalare k	-3					
10							
11				**Risultati**			
12							
13		**Somma A+B**				**Differenza A-B**	
14		Colonna 1	Colonna 2			Colonna 1	Colonna 2
15	Riga 1	-1	1		Riga 1	3	-7
16	Riga 2	3	1		Riga 2	1	1
17							
18		**Prodotto AB**				**Prodotto kA**	
19		Colonna 1	Colonna 2			Colonna 1	Colonna 2
20	Riga 1	-5	4		Riga 1	-3	9
21	Riga 2	-3	8		Riga 2	-6	-3
22							
23	**Determinante di A**		7		**Determinante di B**		-4

FIGURA 1

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

Dopo aver scritto le intestazioni come illustrato nella tabella proposta immettiamo gli elementi della prima matrice nelle celle **B6**, **B7**, **C6**, **C7**, mentre nelle celle **F6**, **F7**, **G6**, **G7** immettiamo gli elementi della seconda matrice.
Per ottenere la somma delle due matrici, dopo aver selezionato la cella **B15** scriviamo la formula:

$$= \mathrm{B6} + \mathrm{F6}$$

e la copiamo nelle celle **B16**, **C15**, **C16**.

Per ottenere la differenza delle due matrici, immettiamo nella cella **F15** la formula:

$$= \mathrm{B6} - \mathrm{F6}$$

copiandola quindi nelle celle **F16**, **G15**, **G16**.

Per ottenere il prodotto delle due matrici si può utilizzare l'apposita funzione di *Excel*, che ha la sintassi seguente:

MATR.PRODOTTO(matrice1; matrice2)

Per usare questa funzione occorre selezionare preventivamente tutte le celle che conterranno gli elementi della matrice prodotto.
Selezioniamo quindi le celle **B20**, **B21**, **C20**, **C21** e scriviamo:

=MATR.PRODOTTO(B6:C7;F6:G7)

A questo punto, invece di premere *Invio* come si fa di solito, premiamo *Ctrl+Maiusc+Invio*: in questo modo nelle celle selezionate compaiono gli elementi della matrice prodotto.
Osserviamo che se dopo aver scritto la formula si preme solo *Invio*, *Excel* fornisce soltanto l'elemento appartenente alla prima riga e alla prima colonna (in questo caso -5), e non l'intera matrice.

Per calcolare il determinante delle due matrici utilizziamo la funzione di *Excel* corrispondente; essa ha la sintassi:

MATR.DETERM(matrice)

Digitiamo dunque nella cella **C23** la formula

= MATR.DETERM(B6;C7)

e copiamola nella cella **G23**.

ESERCIZI

1 Utilizza il foglio elettronico per eseguire le operazioni tra matrici quadrate di ordine 3.

2 Utilizza il foglio elettronico per calcolare il determinante di una matrice quadrata di ordine 3.

Eseguire operazioni con le matrici usando *Derive*

Il programma *Derive* consente di eseguire le operazioni tra le matrici studiate in questo capitolo, compreso il calcolo del determinante e dell'inversa di una matrice quadrata, con estrema semplicità.
Inseriamo ad esempio le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \pi & 2 \\ -3 & \sqrt{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Facciamo clic sul pulsante : appare una finestra (**FIGURA 2**) intitolata "Crea matrice..."; scriviamo nelle apposite caselle il numero di righe e di colonne di cui è composta la matrice che vogliamo definire (oppure impostiamo tali valori mediante i pulsanti con le freccine a destra delle caselle) e quindi clicchiamo su *OK*.

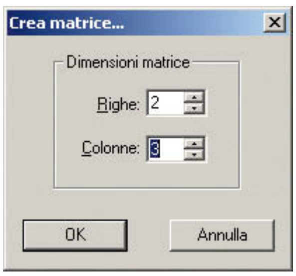


FIGURA 2

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

Compare una seconda finestra (FIGURA 3) con una tabella già predisposta per l'inserimento degli elementi della matrice: non dobbiamo fare altro che riempirla e cliccare su *OK*.

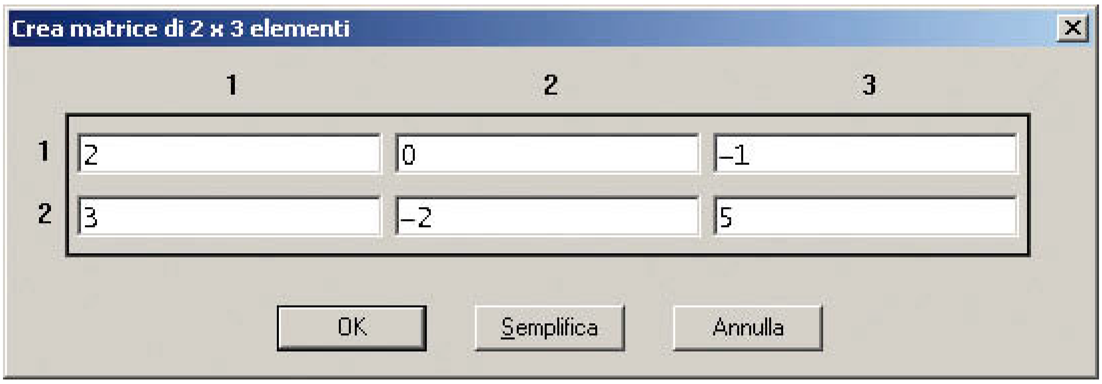


FIGURA 3

La matrice così definita apparirà nella finestra *Derive* (espressione **#1** di FIGURA 4). Ripetiamo poi la procedura descritta per inserire le altre due matrici.

In alternativa al metodo descritto, le matrici si possono introdurre mediante la procedura con cui si inserisce una qualsiasi espressione: occorre tenere presente che per *Derive* una matrice non è altro che un vettore colonna i cui elementi sono vettori riga. Perciò per inserire la matrice A è sufficiente inserire l'espressione

[2,0,–1; 3,–2,5]

Le operazioni tra le matrici si indicano con i comuni simboli aritmetici. Naturalmente *Derive* può eseguire le operazioni tra le matrici solo se il numero di righe e di colonne di esse rende possibile l'operazione.
Calcoliamo ad esempio la matrice $A - B$.

Cominciamo con il selezionare la matrice **#1** cliccando sopra di essa; quindi premiamo il tasto **F3**: in tal modo la matrice selezionata viene inserita nella riga di inserimento delle espressioni. Scriviamo quindi il segno – e spostiamo il mouse nella finestra algebrica cliccando sulla matrice **#2** al fine di selezionarla; premiamo nuovamente il tasto **F3** per inserire la nuova matrice. Per immettere l'espressione e ottenere il risultato dell'operazione facciamo clic sul pulsante (FIGURA 4).

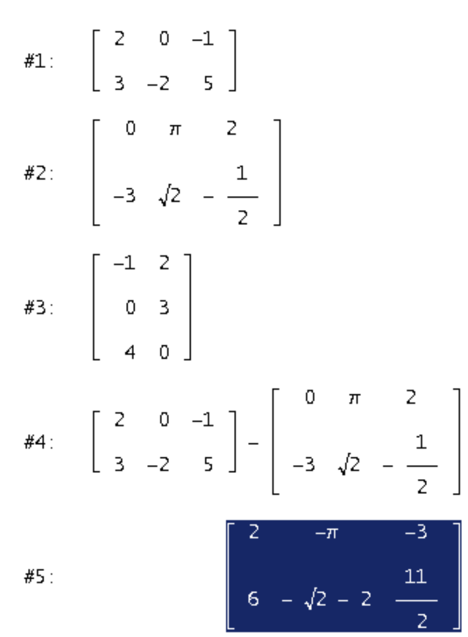


FIGURA 4

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

Dovendo eseguire diverse operazioni su alcune matrici date è preferibile, per semplificare il lavoro, associare un nome a ciascuna di esse. Ad esempio, per assegnare i nomi **m1**, **m2**, **m3** alle matrici già inserite procediamo nel modo seguente.
Scriviamo **m1:=**, selezioniamo la matrice **#1** e premiamo il tasto **F3** per inserire la matrice selezionata. Premiamo infine il tasto *Invio*. Ripetiamo il procedimento per le altre due matrici.
Da questo momento sarà possibile inserire nelle espressioni di *Derive* **m1**, **m2**, **m3** anziché scrivere per esteso le componenti della matrice.
Calcoliamo ad esempio i prodotti **m1*m3** e **m3*m1**: è sufficiente inserire tali espressioni e semplificare (**FIGURA 5**).

#6: $\quad m1 := \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

#7: $\quad m2 := \begin{bmatrix} 0 & \pi & 2 \\ -3 & \sqrt{2} & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$

#8: $\quad m3 := \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

#9: $\quad m1 \cdot m3$

#10: $\quad \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 17 & 0 \end{bmatrix}$

#11: $\quad m3 \cdot m1$

#12: $\quad \begin{bmatrix} 4 & -4 & 11 \\ 9 & -6 & 15 \\ 8 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

FIGURA 5

Con *Derive* è possibile calcolare rapidamente il determinante di una matrice quadrata.
Dopo aver inserito la matrice **m4** (**FIGURA 6**), per calcolarne il determinante immettiamo l'espressione **det(m4)** e semplifichiamo.

#14: $\quad m4 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ -3 & 4 & 1 & -2 \\ -4 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

#15: $\quad DET(m4)$

#16: $\quad 900$

FIGURA 6

Naturalmente le matrici su cui opera *Derive* possono anche contenere elementi letterali.

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

In **FIGURA 7** si vede come calcolare il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 1 & y \\ 1 & x & y & 1 \\ 1 & y & x & 1 \\ y & 1 & 1 & x \end{bmatrix}$$

che viene poi scomposto in fattori.

#17: $\begin{bmatrix} x & 1 & 1 & y \\ 1 & x & y & 1 \\ 1 & y & x & 1 \\ y & 1 & 1 & x \end{bmatrix}$

#18: $\mathrm{DET}\begin{bmatrix} x & 1 & 1 & y \\ 1 & x & y & 1 \\ 1 & y & x & 1 \\ y & 1 & 1 & x \end{bmatrix}$

#19: $x^4 - x^2 \cdot (2 \cdot y^2 + 4) + 8 \cdot x \cdot y + y^2 \cdot (y^2 - 4)$

#20: $(x - y)^2 \cdot (x + y + 2) \cdot (x + y - 2)$

FIGURA 7

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara

Soluzioni dei quesiti a risposta multipla e degli esercizi vero/falso

1	b
2	c
3	a
16	F
17	V
18	F
19	V
20	F
21	F
22	V
23	a
24	c
63	F
64	V
65	F
66	V
67	F
68	F
69	F
70	V
71	d
72	a ; c ; h

© 2012 De Agostini Scuola SpA – Novara