

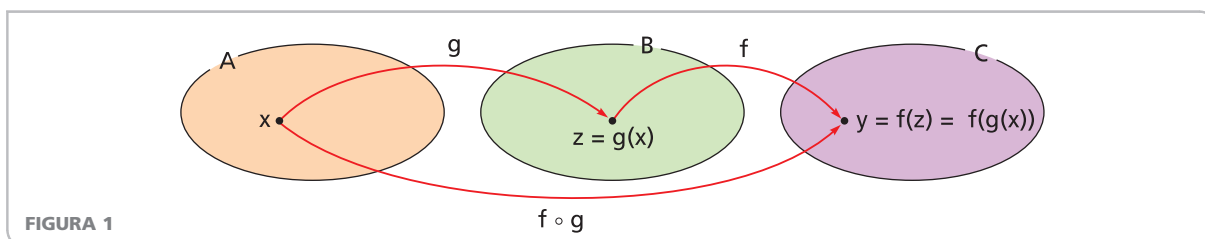
## Unità 10

## Funzioni – Complementi

- Funzioni o applicazioni composte
- Composizione di funzioni matematiche
- Funzioni limitate. Funzioni periodiche
- Funzioni lineari a tratti

### Funzioni o applicazioni composte

Dati i tre insiemi  $A, B, C$ , consideriamo un'applicazione  $g$  da  $A$  a  $B$  e un'applicazione  $f$  da  $B$  a  $C$ . Consideriamo un'applicazione  $g$  che faccia corrispondere a un generico elemento  $x$  di  $A$  l'elemento  $z = g(x)$  di  $B$  e un'applicazione  $f$  che faccia corrispondere all'elemento  $z = g(x)$  di  $B$  l'elemento  $y = f(z) = f(g(x))$  di  $C$  (FIGURA 1).



In questo modo si ottiene una applicazione tra  $A$  e  $C$  che associa a un generico elemento di  $A$  un elemento di  $C$ . Questa applicazione si chiama *applicazione composta* o **funzione composta** e si indica con la scrittura  $f \circ g$ , che si legge « $f$  composto  $g$ ».

Il simbolo  $\circ$  è il simbolo di composizione di funzioni. Il concetto di composizione si estende facilmente al caso in cui vi siano più di due componenti.

#### ATTENZIONE!

La funzione che opera per prima è quella scritta a destra del simbolo di composizione di applicazioni. La  $f$  e la  $g$  si dicono *funzioni componenti* di  $f \circ g$ .

#### ESEMPI

- 1**  $A, B$  e  $C$  sono tre insiemi di persone; in  $A$  vi sono dei ragazzi i cui padri costituiscono l'insieme  $B$ ; in  $C$  vi è poi un fratello di ciascuna delle persone che stanno in  $B$ . Siano  $g$  ed  $f$  due funzioni tali che
- $$g: x \rightarrow z = \text{padre di } x = g(x) \quad x \in A, z \in B \quad f: z \rightarrow y = \text{fratello di } z = f(z) \quad z \in B, y \in C$$

Risulta allora

$$y = f(z) = f(g(x)) = \text{fratello del padre di } x \text{ (cioè zio di } x)$$

e pertanto  $f \circ g: x \rightarrow y = \text{zio di } x = f(g(x))$ .

- 2** In un piano consideriamo due rette  $r$  e  $s$ , ad esempio come in **FIGURA 2**. Sia  $\sigma_r$  la simmetria rispetto alla retta  $r$ , cioè  $\sigma_r$  sia l'applicazione (trasformazione) del piano in sé che a ogni punto  $P$  del piano fa corrispondere il punto  $P'$ , simmetrico di  $P$  rispetto a  $r$ . Sia  $\sigma_s$  la simmetria rispetto alla retta  $s$ .

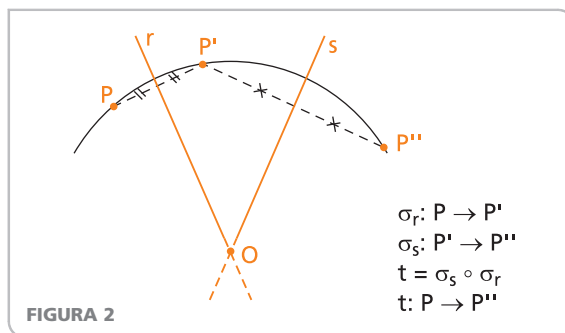
Consideriamo un generico punto  $P$  del piano e consideriamo il punto  $P'$ , immagine di  $P$  nella  $\sigma_r$ , cioè il punto  $P'$  simmetrico di  $P$  rispetto a  $r$ .

Applichiamo ora al punto  $P'$  la simmetria rispetto alla retta  $s$ , cioè la trasformazione  $\sigma_s$ ; l'immagine di  $P'$  in  $\sigma_s$  è il punto  $P''$ , simmetrico di  $P'$  rispetto a  $s$ .

Detta  $t$  l'applicazione composta  $\sigma_s \circ \sigma_r$ , notiamo che il punto  $P$  viene trasformato da  $t$  nel punto  $P''$ . Osserviamo che la trasformazione

$$t = \sigma_s \circ \sigma_r$$

non è una simmetria rispetto a una retta. Si potrebbe dimostrare, come è intuitivo dedurre dall'esame della **FIGURA 2**, che nel nostro caso la trasformazione  $t$  è una *rotazione* attorno al punto  $O$ , punto di intersezione tra  $r$  e  $s$ .



**FIGURA 2**

## Composizione di funzioni matematiche

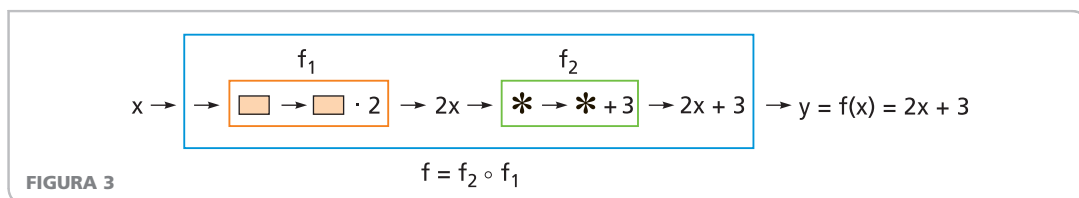
Vediamo alcuni esempi di composizione di funzioni matematiche.

### ESEMPI

- 1** Analizziamo le componenti della funzione composta

$$f: x \rightarrow 2x + 3 \quad x \in \mathbb{R}$$

La funzione data ha equazione  $y = 2x + 3$ . Per ottenere l'immagine  $y$  di un  $x$  del dominio (**FIGURA 3**), occorre moltiplicare per 2 tale valore di  $x$  (è il valore iniziale, simboleggiato in figura con un piccolo rettangolo) e aggiungere 3 al risultato (simboleggiato in figura con un asterisco).



**FIGURA 3**

Notiamo che la funzione  $f$  è composta da  $f_1$  e  $f_2$ ;  $f_1$  è la funzione che opera per prima. La funzione  $f_1$  opera moltiplicando per 2 l'elemento in ingresso e quindi è

$$f_1: x \rightarrow 2x$$

La funzione  $f_2$  opera aggiungendo 3 all'elemento in ingresso (che genericamente è  $x$  ma in questo caso è  $2x$ ) e pertanto

$$f_2: x \rightarrow x + 3$$

In definitiva risulta

$$f = f_2 \circ f_1 \quad \text{cioè} \quad f_2 \circ f_1: x \rightarrow y = f(x) = f_2(f_1(x))$$

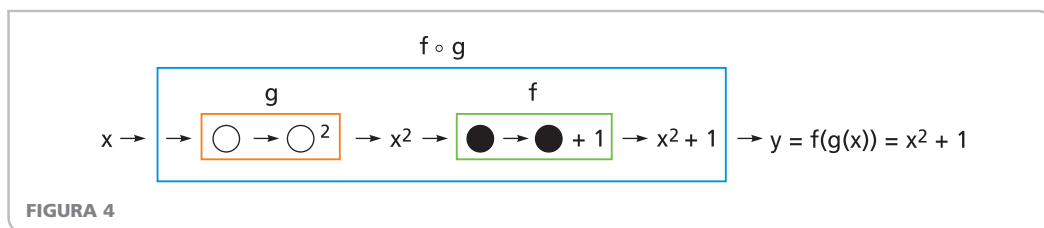
## 2 Date le funzioni

$$\begin{aligned} f: x &\rightarrow x + 1 \\ g: x &\rightarrow x^2 \end{aligned} \quad x \in \mathbb{R}$$

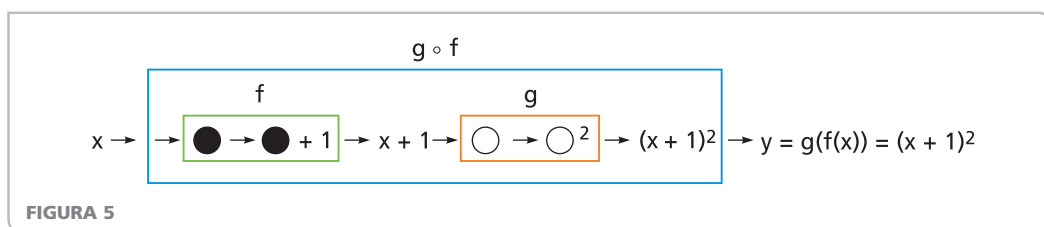
determinare le funzioni composte  $f \circ g$  e  $g \circ f$ .

- La determinazione di  $f \circ g$  è schematizzata in **FIGURA 4**: dapprima opera  $g$  che trasforma l'elemento  $x$  in ingresso nel suo quadrato, poi opera  $f$  che trasforma l'elemento in ingresso (che qui è  $x^2$ ) aggiungendo 1; pertanto risulta

$$f \circ g: x \rightarrow x^2 + 1 \quad \text{ossia} \quad f(g(x)) = x^2 + 1$$



- Determiniamo ora  $g \circ f$  (**FIGURA 5**): per prima opera  $f$  che trasforma l'elemento  $x$  in entrata aggiungendo 1; poi sul risultato  $(x + 1)$  opera  $g$  trasformandolo nel suo quadrato  $(x + 1)^2$ .



Possiamo quindi concludere che

$$g \circ f: x \rightarrow (x + 1)^2 \quad \text{ossia} \quad g(f(x)) = (x + 1)^2$$

Osserviamo ora che, se consideriamo un generico  $x$ , la sua immagine per mezzo di  $f \circ g$  o di  $g \circ f$  non è la stessa. Ad esempio, per  $x = 3$  si ha

$$f(g(3)) = 3^2 + 1 = 10 \quad \text{e} \quad g(f(3)) = (3 + 1)^2 = 4^2 = 16$$

Pertanto risulta

$$f(g(x)) \neq g(f(x)) \quad \text{cioè} \quad f \circ g \neq g \circ f$$

*l'operazione di composizione di funzioni non è commutativa.*

## Funzioni limitate. Funzioni periodiche

### DEFINIZIONE FUNZIONE LIMITATA

Una funzione si dice limitata se il suo codominio è un intervallo limitato o può essere contenuto in un intervallo limitato.

Le funzioni costanti sono esempi di funzioni limitate. In **FIGURA 6** vi è il grafico di funzione limitata e in **FIGURA 7** quello di una funzione non limitata. Come vedremo, le funzioni circolari seno e coseno di un angolo, che si studiano in trigonometria, sono esempi di funzioni limitate.

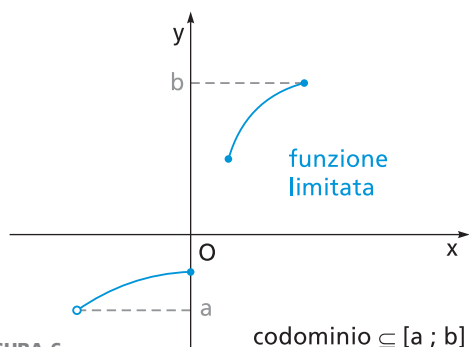


FIGURA 6

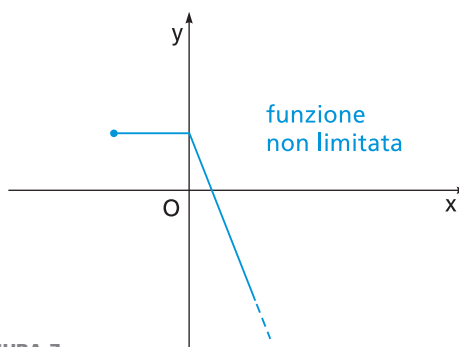


FIGURA 7

### DEFINIZIONE FUNZIONE PERIODICA

Una funzione di equazione  $y = f(x)$  si dice periodica di periodo  $T$  ( $T > 0$ ), se risulta

$$f(x + kT) = f(x)$$

per qualsiasi numero  $k$  intero relativo ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Dalla definizione deduciamo che il valore della funzione non cambia se si sostituisce al posto di  $x$  il valore  $x + kT$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ : questo implica che il grafico della funzione ha lo stesso andamento negli infiniti intervalli adiacenti di ampiezza uguale al periodo.

In FIGURA 8 è rappresentato il grafico di una funzione periodica di periodo 2. Le funzioni trigonometriche sono tutte periodiche.

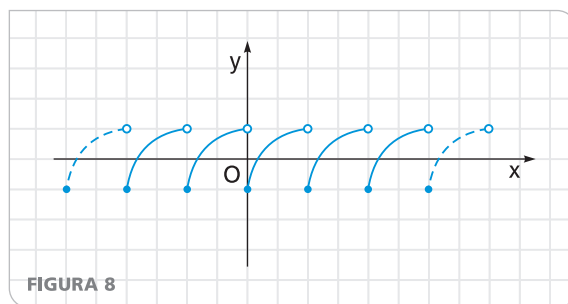


FIGURA 8

## Funzioni lineari a tratti

Sono dette **funzioni lineari a tratti** quelle il cui grafico è costituito da segmenti, da semirette o da segmenti e semirette.

### ESEMPLI

- 1 Tracciamo il grafico della funzione definita da

$$y = \begin{cases} -x & \text{per } x < -1 \\ x - 5 & \text{per } 0 \leq x < 6 \end{cases}$$

e individuiamo il dominio e il codominio della funzione.

La relazione precedente può anche essere scritta nella forma equivalente

$$\underbrace{\begin{cases} y = -x \\ x < -1 \end{cases}}_{\mathbf{A}} \vee \underbrace{\begin{cases} y = x - 5 \\ 0 \leq x < 6 \end{cases}}_{\mathbf{B}}$$

- Le relazioni **A** definiscono una semiretta aperta, cioè privata della sua origine, contenuta nella retta di equazione  $y = -x$  (bisettrice del 2°-4° quadrante): per ottenerla occorre considerare solo i punti della retta la cui ascissa è minore di  $-1$  (FIGURA 9).

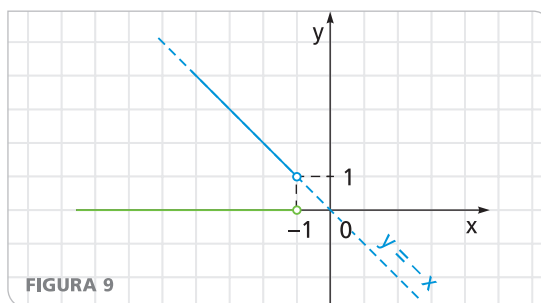
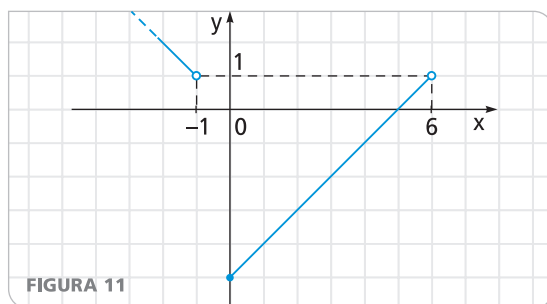
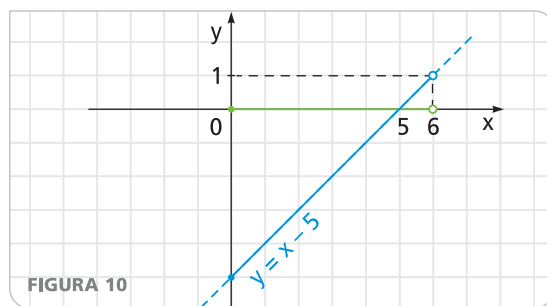


FIGURA 9

■ Le relazioni **B** definiscono un segmento, privato di un estremo, contenuto nella retta di equazione  $y = x - 5$ : per ottenerlo occorre considerare solo i punti della retta le cui ascisse soddisfano la condizione  $0 \leq x < 6$  (**FIGURA 10**). Come sappiamo, per tracciare la retta di equazione  $y = x - 5$  basta individuare due suoi punti qualsiasi: in questo caso, però, è opportuno considerare proprio i due punti della retta la cui ascissa è 0 e 6.



Il grafico della funzione data è in **FIGURA 11** e si ottiene riunendo la semiretta e il segmento prima considerati.

Dall'esame della figura possiamo dedurre il dominio e il codominio richiesti:

$$D = \{x \in \mathbb{R} | x < -1 \vee 0 \leq x < 6\} = (-\infty; -1) \cup [0; 6)$$

$$C = \{y \in \mathbb{R} | -5 \leq y < 1 \vee y > 1\}$$

**2** Tracciamo ora il grafico della **funzione parte intera**: tale funzione associa a ogni numero reale  $x$  il più grande intero relativo minore o uguale a  $x$ . La parte intera di un numero  $x$  si indica con uno dei seguenti simboli:

$$\text{int}(x) \quad [x] \quad \text{floor}(x) \text{ (in inglese)}$$

Dalla definizione data possiamo scrivere, ad esempio,

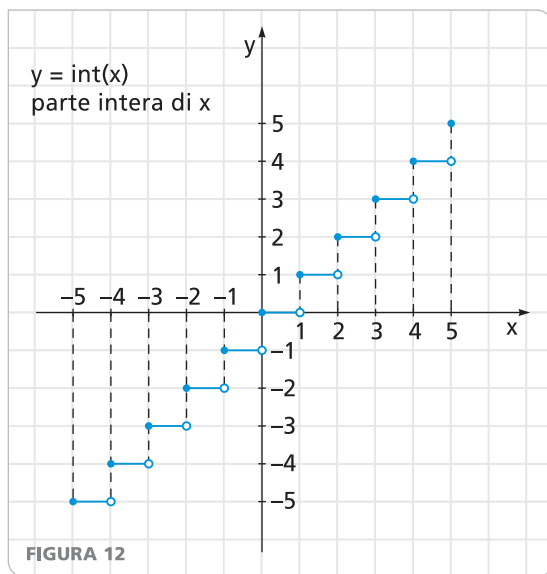
$$\text{int}(-3) = -3 \quad \text{int}(4) = 4 \quad \text{int}(0) = 0 \quad \text{int}(2,9987) = 2 \quad \text{int}(-7,1) = -8$$

$$\text{int}\left(-\frac{5}{2}\right) = \text{int}(-2,5) = -3 \quad \text{int}(-\sqrt{3}) = \text{int}(-1,732...) = -2 \quad \text{int}\left(\frac{17}{3}\right) = \text{int}(5,666...) = 5$$

Il grafico della funzione  $y = \text{int}(x)$  è in **FIGURA 12**: esso è costituito da infiniti segmenti paralleli all'asse  $x$ , di misura 1, chiusi a sinistra e aperti a destra. Basta infatti ricordare l'equazione dell'asse  $x$  e delle sue parallele e che, per la definizione data, si ha

$$\begin{aligned} &\dots \\ \text{per } -2 \leq x < -1 &\rightarrow y = \text{int}(x) = -2 \\ \text{per } -1 \leq x < 0 &\rightarrow y = \text{int}(x) = -1 \\ \text{per } 0 \leq x < 1 &\rightarrow y = \text{int}(x) = 0 \\ \text{per } 1 \leq x < 2 &\rightarrow y = \text{int}(x) = 1 \\ \text{per } 2 \leq x < 3 &\rightarrow y = \text{int}(x) = 2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Il **dominio** della funzione parte intera è  $\mathbb{R}$  e il **codominio** è  $\mathbb{Z}$ , cioè l'insieme dei numeri interi relativi.



- 3 Tracciamo ora il grafico di un'altra funzione lineare a tratti, la **funzione parte frazionaria**: tale funzione, che indicheremo con  $f$ , associa a ogni numero reale la differenza tra il numero stesso e la sua parte intera

$$f(x) = x - \text{int}(x)$$

Su alcuni testi si trova, per la parte frazionaria di un numero  $x$ , la scrittura  $\{x\} = x - \text{int}(x)$ .

Dalla definizione data possiamo ad esempio scrivere

$$f(-5) = 0 \quad f(0) = 0 \quad f(132) = 0 \quad f(2,34) = 2,34 - 2 = 0,34$$

$$f(5,1) = 5,1 - 5 = 0,1 \quad f(-2,4) = -2,4 - (-3) = 0,6 \quad f(-0,8) = -0,8 - (-1) = 0,2$$

Come puoi notare, la parte frazionaria di un numero reale è sempre maggiore o uguale a zero:

$$x - \text{int}(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ad esempio

$$\text{per } -2 \leq x < -1 \rightarrow y = f(x) = x - (-2) = x + 2$$

$$\text{per } -1 \leq x < 0 \rightarrow y = f(x) = x - (-1) = x + 1$$

$$\text{per } 0 \leq x < 1 \rightarrow y = f(x) = x - 0 = x$$

$$\text{per } 1 \leq x < 2 \rightarrow y = f(x) = x - 1$$

$$\text{per } 2 \leq x < 3 \rightarrow y = f(x) = x - 2$$

e così via.

Il grafico della funzione, in **FIGURA 13**, è costituito da infiniti segmenti, tutti inclinati di  $45^\circ$  sull'asse  $x$ : se  $k$  è il generico numero intero relativo, la funzione ha equazione  $y = x - k$  per tutti gli  $x$  dell'intervallo  $[k; k + 1)$ .

La funzione è limitata ed è periodica di periodo  $T = 1$ . Il dominio di  $f$  è  $\mathbb{R}$  e il codominio è l'intervallo  $[0; 1)$ .

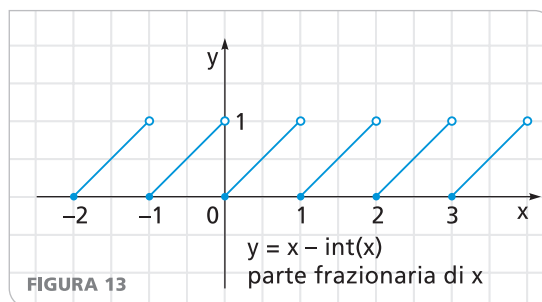


FIGURA 13

# ESERCIZI

- **Funzioni o applicazioni composte**
- **Composizione di funzioni matematiche**
- **Funzioni lineari a tratti**
- **Autovalutazione on line** 
- **Laboratorio on line** 

Puoi risolvere gli esercizi segnalati usando il software suggerito:

 Cabri  Derive  Foglio Elettronico  Geogebra

## Funzioni o applicazioni composte

- 1** Verifica che se si esegue nell'ordine la composizione di una funzione biunivoca  $f: A \rightarrow B$  con la sua inversa  $f^{-1}: B \rightarrow A$  si ottiene la *funzione identità*, cioè la funzione che associa a ogni elemento  $x \in A$  l'elemento stesso  $x$ . Verifica cioè che

$$f^{-1} \circ f = i$$

dove  $i$  è la funzione identità, ossia che  $f^{-1}(f(x)) = x$ .

- 2** Considera i tre insiemi  $X = \{x\}$ ,  $Y = \{y\}$ ,  $Z = \{z\}$  e le funzioni  $f$  e  $g$  tali che  $f: x \rightarrow y$  e  $g: y \rightarrow z$ . Verifica che è possibile la composizione  $g \circ f$  ma non la  $f \circ g$ .

- 3** Sono dati gli insiemi  $A = \{a; b\}$ ,  $B = \{c; d\}$ ,  $C = \{a; e\}$  e le funzioni  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow C$  tali che

$$f(a) = d \quad f(b) = c \quad g(c) = e \quad g(d) = a$$

Verifica che

$$g(f(a)) = a \quad g(f(b)) = e \quad f(g(d)) = d$$

ma che  $f(g(c))$  non è determinabile.

## Composizione di funzioni matematiche

- 4** Individua le componenti  $f_1$  e  $f_2$  delle funzioni composte aventi le seguenti equazioni ( $f_1$  è la funzione che opera per prima):

**a.**  $y = 4x - 1$

**b.**  $y = x^3 + 2$

**c.**  $y = (x + 4)^2$

[**a.**  $f_1: x \rightarrow 4x$ ,  $f_2: x \rightarrow x - 1$ ; ...]

- 5** Individua le componenti  $f_1, f_2, f_3$  delle funzioni composte aventi le seguenti equazioni (le tre funzioni operano nell'ordine dato):

**a.**  $y = (2x - 5)^2$

**b.**  $y = \frac{1}{3}x^2 + 5$

**c.**  $y = (3x + 1)^3$

[**a.**  $f_1: x \rightarrow 2x$ ,  $f_2: x \rightarrow x - 5$ ,  $f_3: x \rightarrow x^2$ ; ...]

**D 6** Date le funzioni  $f: x \rightarrow x - 2$  e  $g: x \rightarrow x^3$ , determina  $f \circ g$  e  $g \circ f$ .

$$[f \circ g: x \rightarrow x^3 - 2; g \circ f: x \rightarrow (x - 2)^3]$$

**D 7** Considera le funzioni  $f$  e  $g$  tali che  $f(x) = 2x - 1$  e  $g(x) = x^2$ . Calcola  $f(g(x))$  e  $g(f(x))$ .

$$[f(g(x)) = 2x^2 - 1; g(f(x)) = (2x - 1)^2]$$

## Funzioni lineari a tratti

**Traccia il grafico delle seguenti funzioni e determinane dominio e codominio.**

**D 8**  $y = \begin{cases} -x + 1 & \text{per } x \leq 0 \\ -x - 3 & \text{per } x > 0 \end{cases}$

$$[D = \mathbb{R}; C = (-\infty; -3) \cup [1; +\infty)]$$

**D 9**  $y = \begin{cases} 2 & \text{per } -5 \leq x < 1 \\ 2x & \text{per } x > 1 \end{cases}$

$$[D = [-5; 1) \cup (1; +\infty); C = [2; +\infty)]$$

**D 10**  $y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{per } -2 < x \leq 0 \\ 2x + 4 & \text{per } 1 \leq x < 3 \end{cases}$

$$[D = (-2; 0] \cup [1; 3); C = (-5; 1] \cup [6; 10)]$$

**D 11**  $y = \begin{cases} 1 - 2x & \text{per } x \leq -1 \\ x + 1 & \text{per } 1 \leq x < 3 \end{cases}$

$$[D = (-\infty; -1] \cup [1; 3); C = [2; +\infty)]$$

**D 12**  $y = \begin{cases} -\frac{3}{2} & \text{per } x < -3 \\ \frac{1}{2}x & \text{per } -3 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{per } x > 2 \end{cases}$

$$\left[ D = \mathbb{R}; C = \left[ -\frac{3}{2}; 1 \right] \right]$$

**D 13**  $y = \begin{cases} -x & \text{per } x \leq -3 \\ x + 3 & \text{per } -3 < x < 0 \\ -x + 3 & \text{per } 0 \leq x < 3 \end{cases}$

$$[D = (-\infty; 3); C = \mathbb{R}^+ = (0; +\infty)]$$

**D 14**  $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{per } x \leq -1 \\ 0,5x + 0,5 & \text{per } -1 < x < 1 \\ x & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$

$$[D = \mathbb{R}; C = \mathbb{R}_0^+ = [0; +\infty)]$$

**D 15**  $y = \begin{cases} 2x + 12 & \text{per } -6 < x < -4 \\ |x| & \text{per } -4 \leq x < 8 \\ 8 & \text{per } x > 8 \end{cases}$

$$[D = (-6; 8) \cup (8; +\infty); C = [0; 8]]$$

**16** Il grafico in figura è quello di una funzione lineare a tratti. Determina il dominio, il codominio e una possibile legge matematica che definisca la funzione.

$$[D = \mathbb{R} - \{0; 3\}; C = \mathbb{R}^+ = (0; +\infty); \dots]$$

