Laboratorio di matematica

C Costruzione di un triangolo, di un parallelogramma e di un rettangolo, di data base, equiestesi a un triangolo dato

Disegna un triangolo ABC e un segmento DE > AB. Costruisci poi un triangolo, un parallelogramma e un rettangolo, tutti di base congruente a DE ed equiestesi ad ABC.

Scegliamo, dal menu *oggetti rettilinei*, lo strumento *Triangolo*, denotato dall'icona, e facciamo clic con esso nella finestra di *Cabri* in tre punti distinti, che saranno i vertici del nostro triangolo, assegnando a essi i nomi A, B, C. Selezioniamo poi, sempre nel menu *oggetti rettilinei*, lo strumento *Segmento*, denotato dall'icona, e disegniamo il segmento DE, di lunghezza maggiore di AB.
Costruiamo ora, sul prolungamento di AB, un segmento congruente a DE. Selezioniamo, sempre dal menu *oggetti rettilinei*, lo strumento *Semiretta*, denotato dall'icona, e con esso facciamo clic prima sul punto A e poi sul punto B (FIGURA 1). Compare una semiretta di origine A e passante per B. Selezioniamo poi, dal menu *costruzioni*, lo strumento *Compasso*, denotato dall'icona, e con esso facciamo clic prima sul segmento DE, per definire il raggio, e quindi sul punto A, per indicare il centro (FIGURA 2). Appare una circonferenza di centro A e raggio DE: è possibile che solo una sua parte sia visibile nella finestra di *Cabri*.

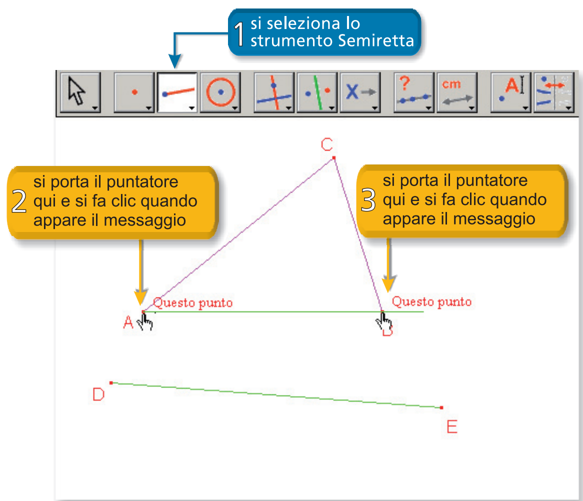

FIGURA 1

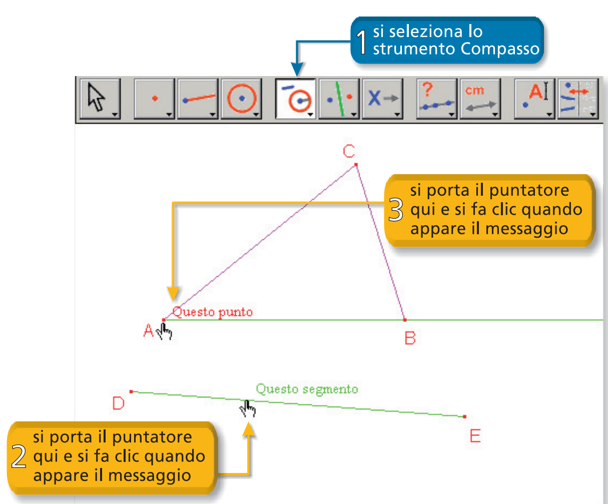

FIGURA 2

Selezioniamo dal menu *oggetti rettilinei* lo strumento *Segmento*, e con esso facciamo clic prima sul punto A e poi sul punto dove si incontrano la semiretta AB e la circonferenza (**FIGURA 3**), cui assegniamo il nome F. Abbiamo così creato il segmento AF, congruente a DE, che sarà la base del triangolo che vogliamo costruire. Con lo strumento *Mostra/Nascondi* nascondiamo quindi la semiretta e la circonferenza.

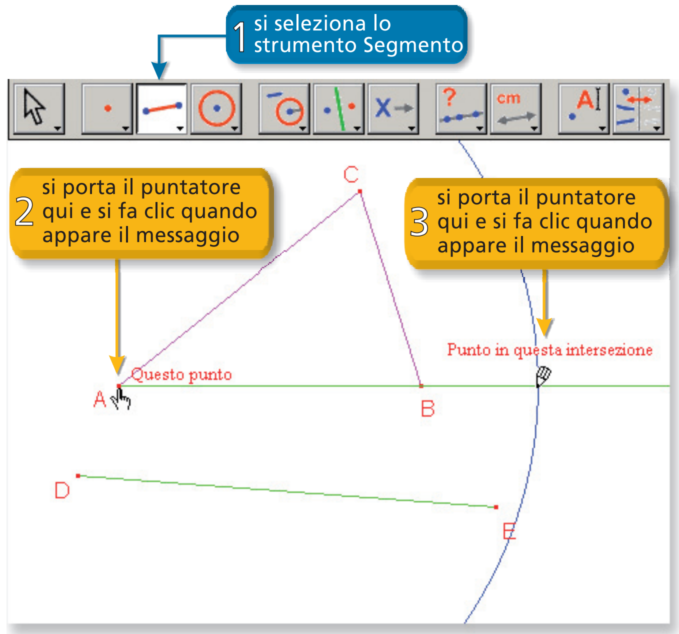

FIGURA 3

Sempre con lo strumento *Segmento* congiungiamo C con F e quindi selezioniamo, dal menu *costruzioni*, lo strumento *Retta parallela*; con esso facciamo clic prima sul segmento CF e poi sul punto B (**FIGURA 4**).

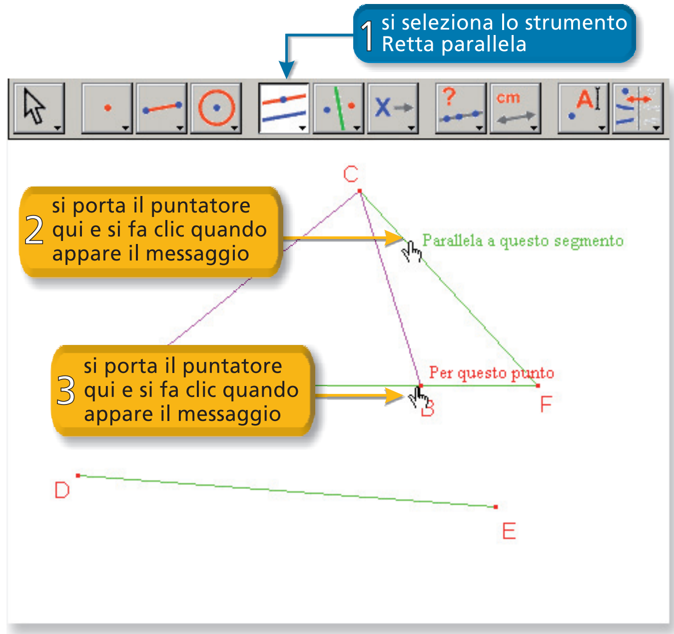

FIGURA 4

Creiamo, con lo strumento *Intersezione di due oggetti*, il punto d'intersezione tra la parallela appena tracciata e il lato AC e assegniamogli il nome G. Selezioniamo quindi lo strumento *Triangolo* e facciamo clic con esso sui punti A, F, G. Come puoi vedere in **FIGURA 5**, dove abbiamo colorato i triangoli per renderli più evidenti, i triangoli GBC e GBF hanno la stessa base GB e l'altezza di entrambi è la distanza tra le rette parallele GB e CF. Essi hanno perciò la stessa area; inoltre si ha:

$$\boldsymbol{A}(ABC) = \boldsymbol{A}(ABG) + \boldsymbol{A}(GBC)$$
$$\boldsymbol{A}(AFG) = \boldsymbol{A}(ABG) + \boldsymbol{A}(GBF)$$

Possiamo pertanto concludere che le aree dei triangoli ABC e AFG sono uguali perché somme di aree uguali. Per averne conferma selezioniamo lo strumento *Area* e facciamo clic sui due triangoli in modo da far comparire le loro aree, come mostrato in **FIGURA 5**.

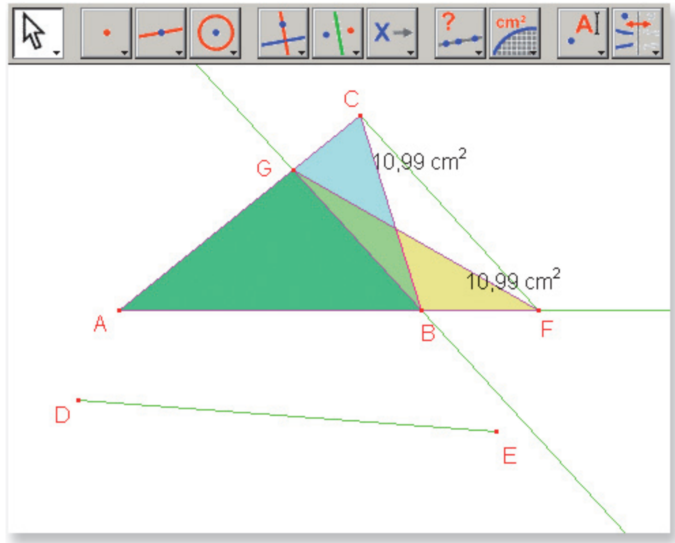

FIGURA 5

Prima di procedere nascondiamo tutti gli elementi della figura salvo il triangolo AFG e il segmento DE.
Costruiamo ora un parallelogramma equiesteso ad AFG: selezioniamo, dal menu *costruzioni*, lo strumento *Punto medio,* denotato dall'icona, portiamo il puntatore vicino al lato FG e facciamo clic quando vediamo apparire la scritta *Punto medio di questo lato del triangolo* (**FIGURA 6**). Assegniamo il nome M al punto così creato.

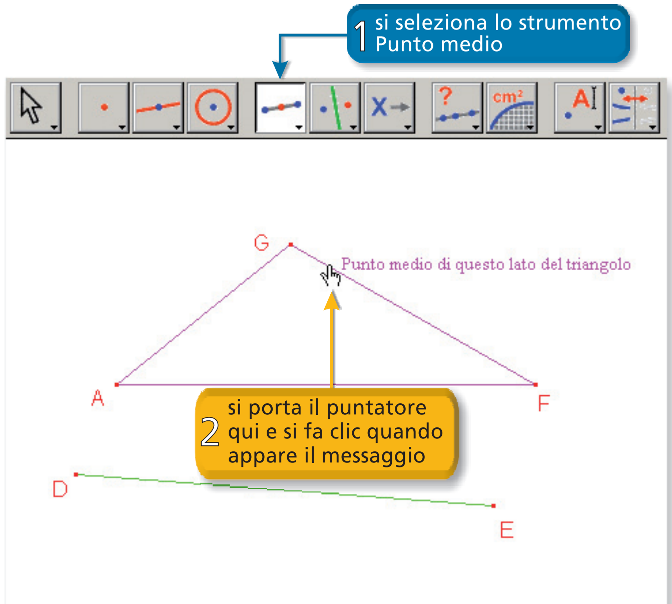

FIGURA 6

Selezioniamo poi dal menu *costruzioni* lo strumento *Retta parallela*, e con esso facciamo clic prima sul lato AG e poi sul punto F (**FIGURA 7**); allo stesso modo tracciamo la parallela al lato AF passante per M. Con lo strumento *Intersezione di due oggetti* del menu *punti* creiamo il punto d'intersezione tra la parallela appena tracciata e il lato AG e assegniamogli il nome N; poi creiamo il punto d'intersezione tra le due parallele e gli assegniamo il nome P. Infine selezioniamo, dal menu *oggetti rettilinei*, lo strumento *Poligono* e con esso facciamo clic in successione sui punti A, F, P, N e ancora sul punto A per chiudere il poligono.

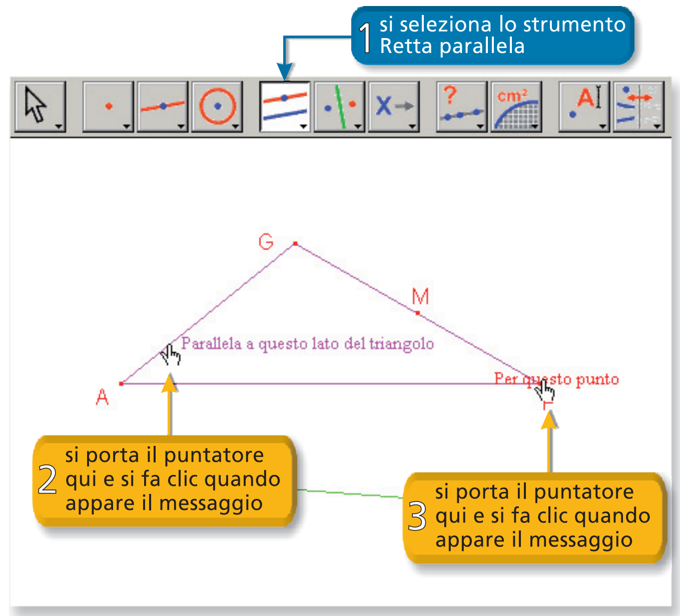

FIGURA 7

Osserva la **FIGURA 8**. Il quadrilatero $AFPN$, avendo per costruzione i lati opposti paralleli, è un parallelogramma. Inoltre, come puoi facilmente dimostrare, i triangoli MNG e MFP sono congruenti. Si può concludere che il triangolo AFG e il parallelogramma $AFPN$ sono equicomposti, e quindi hanno la stessa area. Come al solito, utilizziamo lo strumento *Area* per averne conferma. Il parallelogramma $AFPN$ ha perciò anche la stessa area del triangolo ABC e la sua base AF è congruente al segmento DE ed è quindi il parallelogramma richiesto.

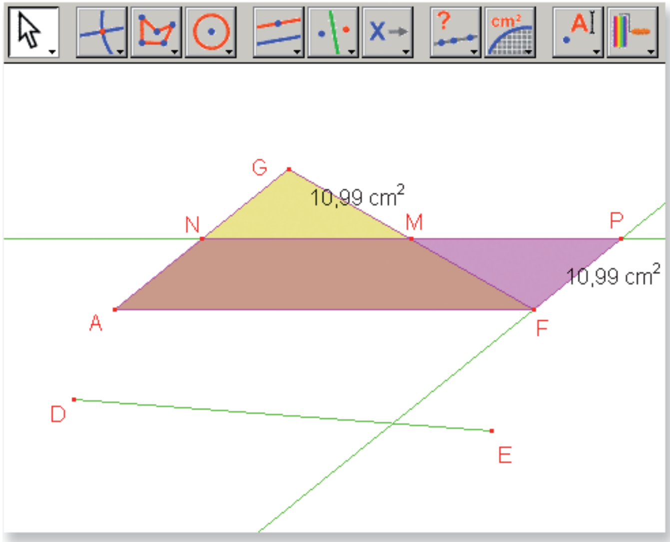

FIGURA 8

Nascondiamo ora il triangolo AGF, il punto M e la retta FP. Per costruire un rettangolo equiesteso al parallelogramma selezioniamo quindi, dal menu *costruzioni*, lo strumento *Retta perpendicolare* e facciamo clic con esso prima sulla retta NP e poi sul punto A (**FIGURA 9**). Creiamo il punto R d'intersezione tra la perpendicolare e la retta NP, quindi allo stesso modo tracciamo la perpendicolare a NP passante per F e chiamiamo Q il punto in cui interseca la retta NP. Con lo strumento *Poligono* facciamo clic in successione sui punti A, F, Q, R, e chiudiamo il poligono con un clic sul punto A.

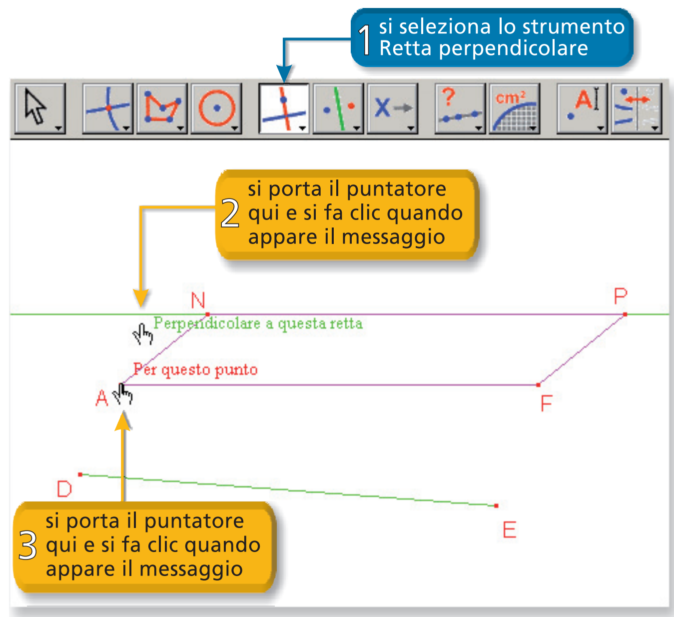

FIGURA 9

Il quadrilatero $AFQR$ è evidentemente un rettangolo e, come puoi vedere dalla **FIGURA 10**, è equicomposto con il parallelogramma $AFPN$. Dunque $AFQR$ ha la stessa area di $AFPN$ e perciò anche di AFG e ABC. Possiamo concludere che $AFQR$ è il rettangolo equiesteso al triangolo ABC con la base AF congruente al segmento DE, come richiesto. In **FIGURA 11** puoi vedere tutti gli elementi della costruzione. Puoi modificare la figura spostando i punti A, B, C, D, ed E. Vedrai che le aree dei quattro poligoni resteranno sempre uguali. Ricorda però che la costruzione è valida finché $AB < DE$: se modifichi la lunghezza di uno o entrambi i segmenti AB e DE vedrai che, quando AB diviene maggiore di DE, tutti i poligoni costruiti, eccetto il triangolo ABC, scompaiono. Tuttavia è possibile, operando una costruzione diversa da quella proposta, ottenere gli stessi poligoni, di base congruente a DE ed equiestesi ad ABC, nel caso in cui sia $AB > DE$.

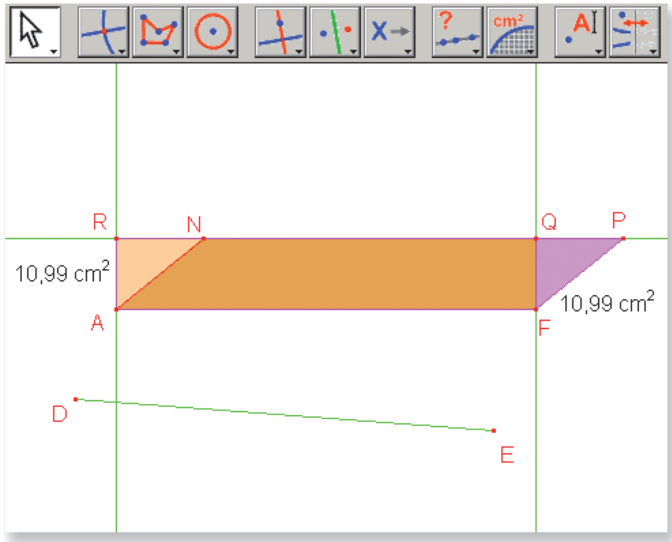

FIGURA 10

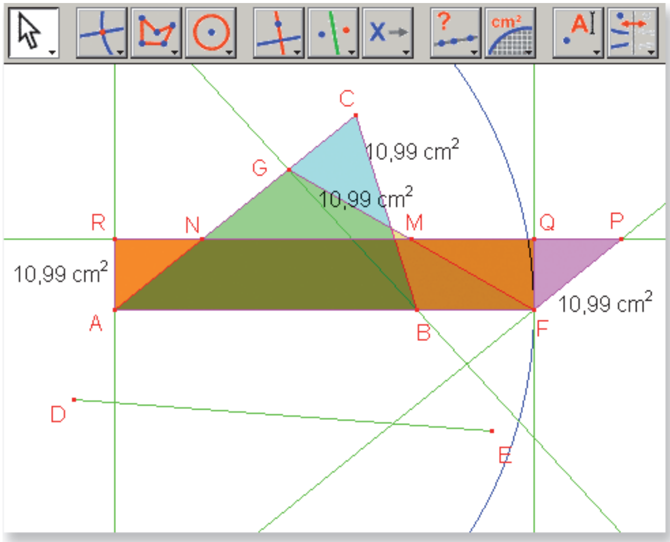

FIGURA 11

TEORIA IN LABORATORIO

Le costruzioni realizzate in questa esercitazione e nell'esercitazione **COSTRUZIONE DI UN TRIANGOLO EQUIESTESO A UN POLIGONO DATO** si potrebbero trasformare, con semplici adattamenti, in dimostrazioni di alcuni interessanti teoremi.

- La costruzione realizzata nell'esercitazione **COSTRUZIONE DI UN TRIANGOLO EQUIESTESO A UN POLIGONO DATO** permette di costruire un triangolo equiesteso a un dato pentagono. Siamo giunti a tale risultato in due passaggi: prima abbiamo costruito un quadrilatero equiesteso al pentagono, poi abbiamo costruito un triangolo equiesteso al quadrilatero ottenuto, e quindi anche al pentagono. La costruzione, in ciascuno dei due passaggi, è sostanzialmente la stessa: essa permette, dato un poligono convesso con quattro o più lati, di determinare un poligono, con un lato in meno, equiesteso a quello dato. Pertanto, dato un poligono convesso con un numero qualsiasi di lati, è possibile, applicando ripetutamente tale costruzione, determinare un triangolo equiesteso a esso. È quindi lecito affermare che:

  Dato un qualsiasi poligono convesso, esiste un triangolo equiesteso a esso

- La costruzione realizzata in questa esercitazione permette di costruire, dato un triangolo e un segmento, un rettangolo equiesteso a quello dato e con la base congruente a quella del segmento assegnato. Perciò, dato un poligono convesso, possiamo, grazie alla costruzione dell'esercitazione **COSTRUZIONE DI UN TRIANGOLO EQUIESTESO A UN POLIGONO DATO**, ottenere un triangolo equiesteso a esso e, applicando a questo triangolo la costruzione della presente esercitazione, ottenere un rettangolo di base assegnata equiesteso al poligono dato:

  Dato un qualsiasi poligono convesso e assegnato un segmento,
  esiste un rettangolo equiesteso al poligono con la base congruente al segmento assegnato

Questi due risultati ci permettono di giungere alla dimostrazione del seguente teorema: **due aree distinte si possono sempre confrontare**.

Infatti, date due aree distinte $\boldsymbol{A_1}$ e $\boldsymbol{A_2}$, consideriamo due poligoni $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ di aree rispettivamente $\boldsymbol{A_1}$ e $\boldsymbol{A_2}$. Possiamo trovare due rettangoli $\mathscr{R}_1$ e $\mathscr{R}_2$ aventi la stessa base e situati dalla stessa parte rispetto alla base comune, rispettivamente equiestesi a $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}_2$ e quindi anch'essi di aree $\boldsymbol{A_1}$ e $\boldsymbol{A_2}$; ma non è difficile rendersi conto che, di questi due rettangoli, quello che ha altezza maggiore contiene quello che ha altezza minore, e pertanto delle due aree la maggiore è quella a cui corrisponde il rettangolo di altezza maggiore.