Laboratorio di matematica

C Costruzione di un triangolo equiesteso a un poligono dato

Disegna un pentagono e quindi costruisci un triangolo equiesteso a esso.

Scegliamo, dal menu *oggetti rettilinei*, lo strumento *Poligono*, denotato dall'icona , e facciamo clic con esso nella finestra di *Cabri* in cinque punti distinti, che saranno i vertici del nostro pentagono, senza dimenticare di fare un ultimo clic sul primo dei punti creati, allo scopo di «chiudere» il poligono. Avremo cura di posizionare tali punti in modo che il pentagono risulti convesso. Infine assegniamo ai vertici del pentagono i nomi di **FIGURA 1**.

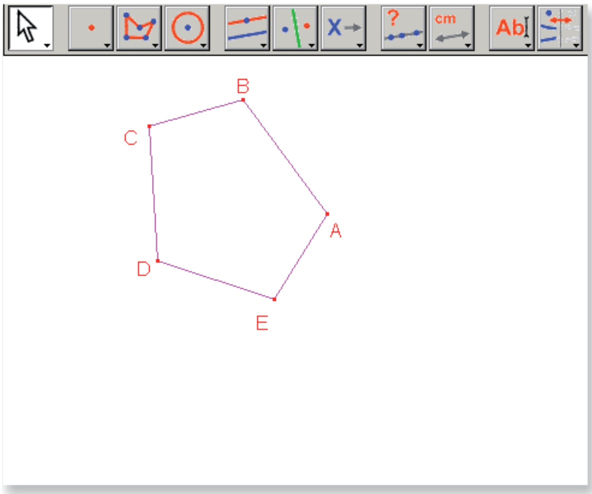

FIGURA 1

Eseguiremo la costruzione in due passi: costruiremo prima un quadrilatero equiesteso al pentagono e quindi un triangolo equiesteso al quadrilatero.

Selezioniamo, dal menu *oggetti rettilinei*, lo strumento *Retta*, denotato dall'icona , e con esso facciamo clic prima sul punto C e quindi sul punto A (**FIGURA 2**). Compare la retta passante per i due punti indicati, cui assegniamo il nome r.

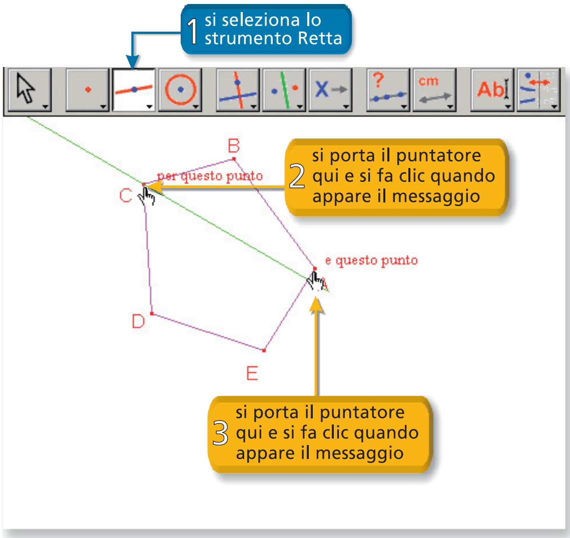

FIGURA 2

Tracciamo poi la parallela alla retta r passante per B: dal menu *costruzioni* selezioniamo lo strumento *Retta parallela*, denotato dall'icona, e con esso facciamo clic prima sul punto B e poi sulla retta r (FIGURA 3). Appare una nuova retta, cui assegniamo il nome s.

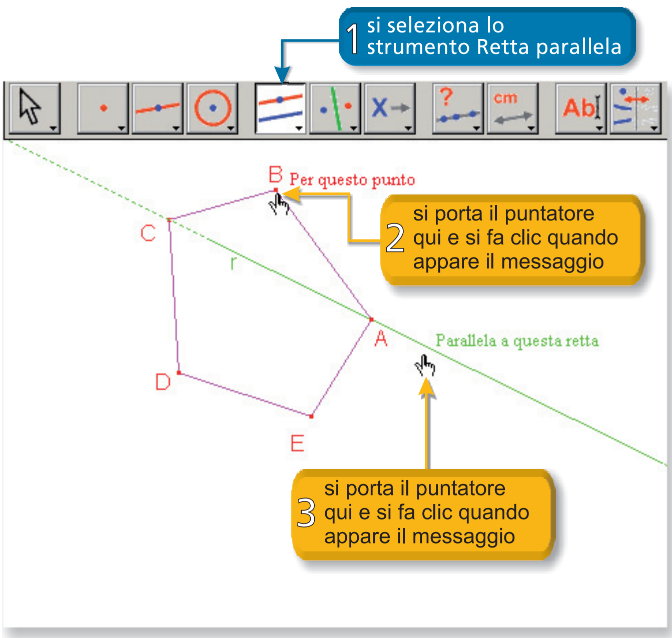

FIGURA 3

Tracciamo ora, con lo strumento *Retta*, la retta passante per A ed E, a cui assegniamo il nome t; selezioniamo dal menu *punti*, il secondo da sinistra, lo strumento *Intersezione di due oggetti*, denotato dall'icona, e creiamo il punto d'intersezione tra s e t, cui diamo il nome F (FIGURA 4).

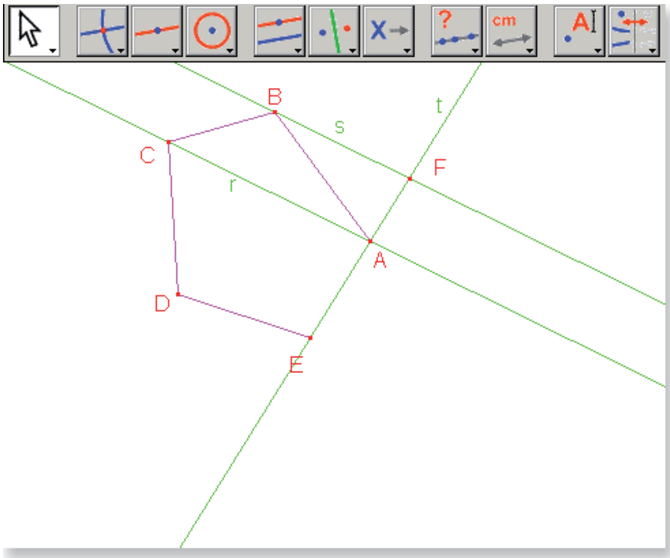

FIGURA 4

Selezioniamo poi lo strumento *Poligono* e con esso facciamo clic in successione sui punti E, F, C, D e chiudiamo il poligono con un ultimo clic sul punto E; in tal modo abbiamo creato il quadrilatero $EFCD$. Affermiamo che questo quadrilatero ha la stessa area del pentagono $ABCDE$.
Infatti (osserva la **FIGURA 6**, in cui i vari poligoni sono evidenziati con colori diversi) i triangoli ABC e AFC hanno la stessa base AC e l'altezza di entrambi è la distanza tra le rette parallele r e s. Pertanto è $\boldsymbol{A}(ABC) = \boldsymbol{A}(AFC)$. Inoltre si ha

$$\boldsymbol{A}(ABCDE) = \boldsymbol{A}(ACDE) + \boldsymbol{A}(ABC) \qquad \boldsymbol{A}(FCDE) = \boldsymbol{A}(ACDE) + \boldsymbol{A}(AFC)$$

e quindi le aree dei due poligoni $ABCDE$ e $FCDE$ sono uguali perché somme di aree uguali.
Per avere conferma della nostra deduzione chiediamo a *Cabri* di calcolare le aree dei due poligoni. Dal menu *misure*, il terzo da destra, selezioniamo lo strumento *Area*, denotato dall'icona . Poiché i due poligoni sono parzialmente sovrapposti, occorre fare particolare attenzione alla posizione in cui fare clic; per ottenere l'area di $ABCDE$ facciamo clic vicino al segmento BC, e per ottenere l'area di $FCDE$ facciamo clic vicino al segmento AF (**FIGURA 5**). Compaiono così le aree, uguali, dei due poligoni (**FIGURA 6**).
Soffermiamoci ora a osservare che la costruzione eseguita a partire da un pentagono ci ha permesso di trovare un quadrilatero, ossia un poligono con un lato in meno di quello da cui eravamo partiti, avente la stessa area del pentagono dato. Tale costruzione è applicabile a un poligono convesso con un numero di lati qualsiasi, e consente di trovare un poligono con la stessa area ma con un lato in meno. Possiamo perciò ripetere la costruzione operata partendo questa volta dal quadrilatero $FCDE$, per ottenere un triangolo avente la stessa area di $FCDE$ e quindi anche la stessa area del pentagono $ABCDE$.

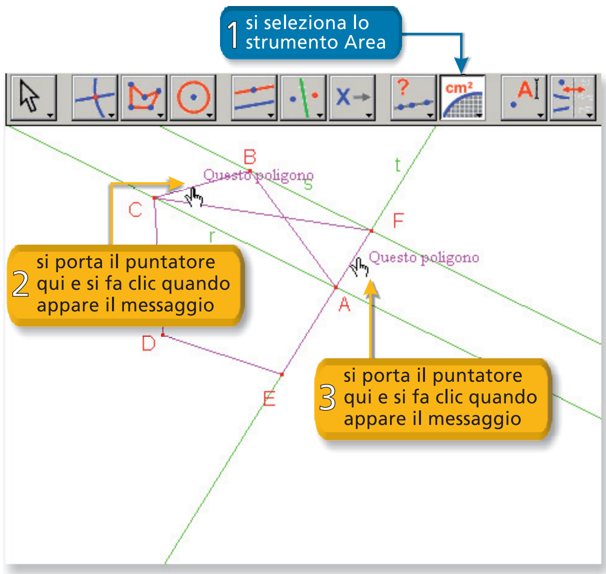

FIGURA 5

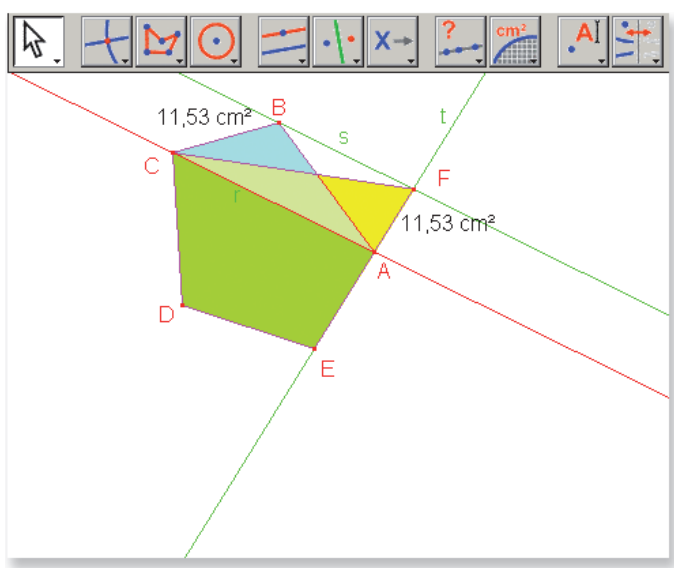

FIGURA 6

Prima di procedere è opportuno nascondere, con il pulsante *Mostra/Nascondi*, tutti gli elementi della costruzione salvo il quadrilatero $FCDE$. Poi, con lo strumento *Retta*, tracciamo la retta u passante per C e per E e quindi, con lo strumento *Retta parallela*, la retta v parallela a u e passante per F; selezioniamo ancora lo strumento *Retta* e tracciamo la retta w passante per i punti D ed E. Con lo strumento *Intersezione di due oggetti* creiamo il punto G di intersezione tra le rette v e w. Infine, con lo strumento *Triangolo*, facciamo clic in successione sui punti D, G, C (FIGURA 7).

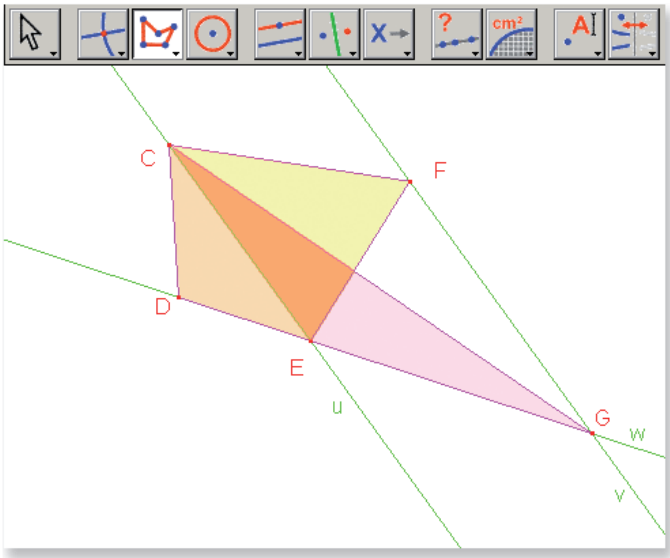

FIGURA 7

I triangoli CEF e CEG hanno la stessa base CE e l'altezza di entrambi è la distanza tra le rette parallele u e v. Pertanto è $\boldsymbol{A}(CEF) = \boldsymbol{A}(CEG)$. Inoltre si ha

$$\boldsymbol{A}(FCDE) = \boldsymbol{A}(CDE) + \boldsymbol{A}(CEF) \qquad \boldsymbol{A}(CDG) = \boldsymbol{A}(CDE) + \boldsymbol{A}(CEG)$$

e quindi le aree del quadrilatero $FCDE$ e del triangolo CDG sono uguali perché somme di aree uguali. Possiamo ora, con lo strumento *Mostra/Nascondi*, far ricomparire gli elementi che avevamo nascosto; infine, con lo strumento *Area*, otteniamo anche l'area del triangolo CDG (FIGURA 8). Puoi modificare la figura spostando i vertici del pentagono $ABCDE$, facendo attenzione affinché il pentagono sia sempre convesso e non intrecciato. Vedrai che le aree dei tre poligoni cambieranno, ma restando sempre uguali tra loro. Il triangolo CDG è quindi il triangolo richiesto.

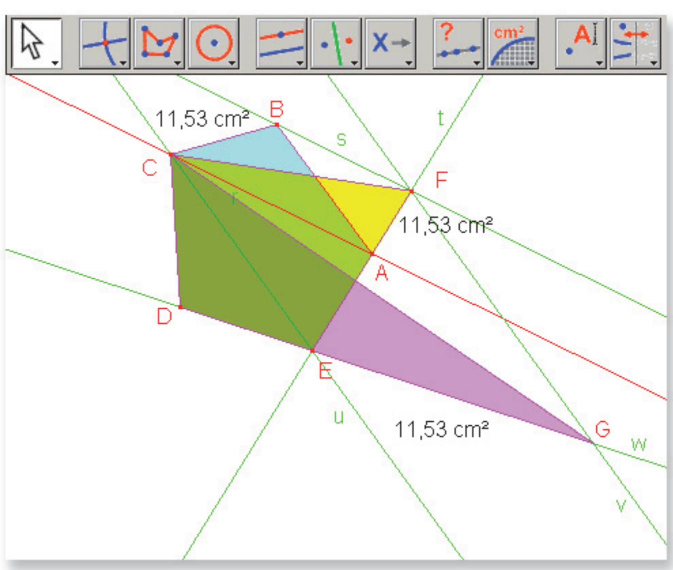

FIGURA 8