

Laboratorio di matematica

D Radicali e grafici di funzioni

Ci proponiamo di visualizzare grazie alle capacità grafiche di *Derive* alcune funzioni del tipo $y = \sqrt[n]{x}$ con n numero naturale diverso da zero. Ci sarà utile vedere contemporaneamente sia la finestra di algebra sia la finestra grafica. Per aprire la finestra grafica facciamo clic sul pulsante . Apriamo il menu *Finestra* e scegliamo la voce *Disponi verticalmente*. In questo modo la finestra di *Derive* viene divisa verticalmente in due parti. Ricordiamo che tutti i comandi che vengono impartiti, mediante i pulsanti o i menu, sono eseguiti nella finestra attiva. Per attivare una finestra è sufficiente fare clic all'interno di essa.

Nella finestra di algebra scriviamo nella casella di inserimento $\sqrt{x}$ e confermiamo con *Invio*. Attiviamo la finestra grafica facendo clic all'interno di essa. Per tracciare il grafico della funzione inserita facciamo clic sul pulsante . Otteniamo il grafico di **FIGURA 1**. Osserviamo che il grafico di $y = \sqrt{x}$ passa per l'origine ed è contenuto nel primo quadrante.

RICORDA

Non è necessario premettere $y=$ all'espressione della funzione, anche se tale possibilità è ammessa.

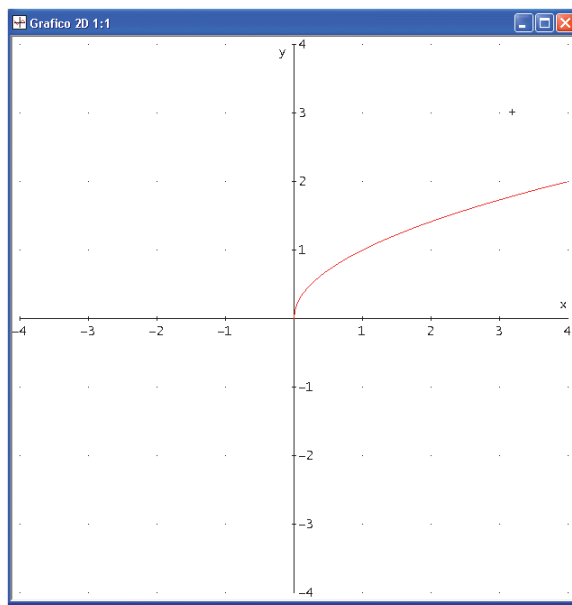


FIGURA 1

PER APPROFONDIRE

L'unità di misura utilizzata nei grafici di *Derive* potrebbe essere diversa per gli assi orizzontale e verticale. Per ottenere la stessa unità di misura sui due assi occorre eseguire due operazioni.

- Apriamo il menu *Imposta* e scegliamo la voce *Rapporto d'aspetto*: compare la finestra di **FIGURA 2**. Facciamo clic sul pulsante *Resetta* e poi su *OK*. In tal modo la finestra del grafico assume la forma di un quadrato.

- Apriamo ancora il menu *Imposta* e portiamo il puntatore del mouse sulla voce *Intervallo del grafico*; apparirà un sottomenu da cui scegliamo la voce *Lunghezza/centro*. Compare la finestra di **FIGURA 3**. Facciamo clic sul pulsante *Resetta* e poi su *OK*.



FIGURA 2

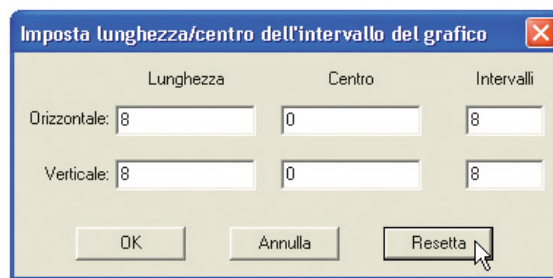


FIGURA 3

Ricorda che il *Rapporto d'aspetto* rappresenta il rapporto tra i lati della finestra del grafico, mentre le due finestre che si aprono facendo clic sulle voci del sottomenu di *Intervallo del grafico* (**FIGURA 4**) ti consentono di definire, con modalità diverse, la porzione del piano cartesiano che viene rappresentata nella finestra.

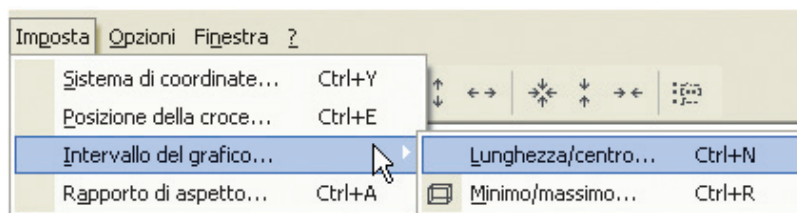


FIGURA 4

Tracciamo ora il grafico della funzione di equazione $y = \sqrt[4]{x}$. Ricorda che per inserire espressioni contenenti radicali con indice diverso da 2 è necessario trasformarle in potenze con esponente frazionario. Scriviamo pertanto nella casella d'inserimento della finestra di algebra $x^{(1/4)}$ e confermiamo con *Invio*. Per visualizzare il grafico, procediamo come abbiamo descritto. Realizziamo con lo stesso procedimento i grafici di $y = \sqrt[6]{x}$ e $y = \sqrt[8]{x}$. Il risultato è mostrato in **FIGURA 5** in cui abbiamo aggiunto una legenda.

Osserviamo che i grafici di tutte queste funzioni passano per l'origine e per il punto (1 ; 1) e per ciascuna di queste curve il valore di y cresce al crescere del valore di x (sono funzioni *crescenti*). Inoltre per $x < 1$ il valore di y cresce al crescere dell'indice n del radicale mentre per $x > 1$ il valore di y decresce al crescere di n .

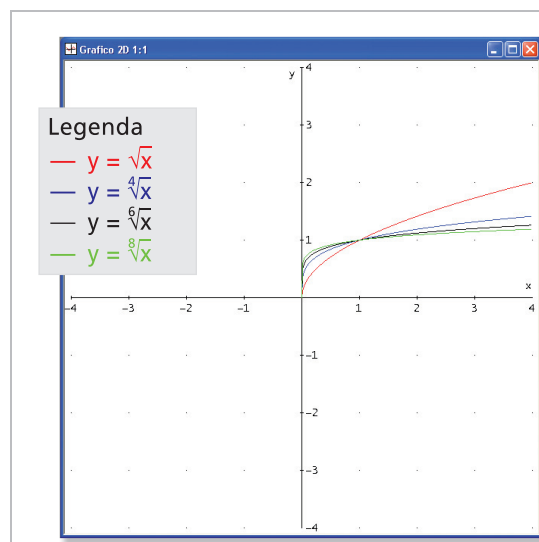
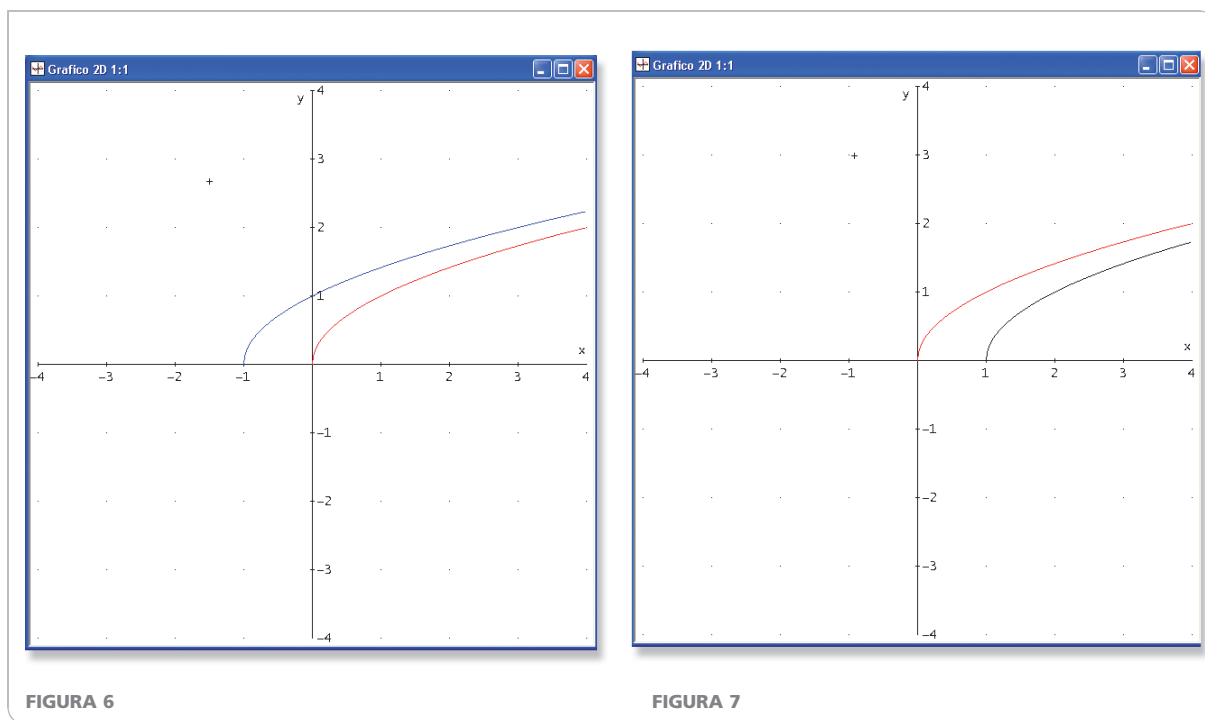


FIGURA 5

- Consideriamo ora la funzione di equazione $y = \sqrt{x+1}$. La condizione di esistenza del radicale è $x+1 \geq 0$ ovvero $x \geq -1$. Il dominio della funzione è quindi $[-1; +\infty)$. Il dominio di $y = \sqrt{x}$ è invece $[0; +\infty)$. Possiamo quindi osservare che la parte di piano occupata dal grafico di $y = \sqrt{x+1}$ è spostata verso sinistra di un'unità rispetto a quella occupata dal grafico di $y = \sqrt{x}$. Con l'aiuto di *Derive* visualizziamo ora il grafico di $y = \sqrt{x+1}$ accanto a quello di $y = \sqrt{x}$. Il risultato è mostrato in **FIGURA 6**. Osserviamo che il grafico di $y = \sqrt{x+1}$ passa per il punto $(-1; 0)$ laddove il grafico di $y = \sqrt{x}$ passa per l'origine; inoltre passa per il punto $(0; 1)$ laddove il grafico di $y = \sqrt{x}$ passa per il punto $(1; 1)$. Il grafico di $y = \sqrt{x+1}$ è infatti uguale a quello di $y = \sqrt{x}$ ma traslato verso sinistra di un'unità.
- Cancelliamo il grafico di $y = \sqrt{x+1}$ facendo clic sul pulsante  che cancella l'ultimo grafico tracciato. Consideriamo ora la funzione di equazione $y = \sqrt{x-1}$ il cui dominio è $[1; +\infty)$. In questo caso notiamo che il grafico di $y = \sqrt{x-1}$ si ottiene traslando a destra di un'unità quello di $y = \sqrt{x}$ (**FIGURA 7**).



- Ci proponiamo ora di tracciare il grafico della funzione di equazione $y = \sqrt{x} + 1$. Prima di visualizzarlo nella finestra grafica proviamo a intuire quale potrebbe essere la posizione del grafico rispetto a quello di $y = \sqrt{x}$. Il dominio di $y = \sqrt{x} + 1$ è lo stesso di quello di $y = \sqrt{x}$. Possiamo dedurre che la parte di piano occupata dal grafico di $y = \sqrt{x} + 1$ non sarà traslata verso sinistra o verso destra rispetto a quella occupata dal grafico di $y = \sqrt{x}$. In corrispondenza del valore $x = 0$ il valore assunto da $y = \sqrt{x}$ è 0, quello assunto da $y = \sqrt{x} + 1$ è $0 + 1 = 1$. In generale, come è evidente, il valore di $\sqrt{x} + 1$ è uguale a quello di $\sqrt{x}$ aumentato di 1 e quindi possiamo intuire che il grafico di $y = \sqrt{x} + 1$ si ottiene traslando verso l'alto di un'unità il grafico di $y = \sqrt{x}$. Usiamo *Derive* per verificare la nostra idea. Il risultato è mostrato in **FIGURA 8** in cui abbiamo aggiunto una legenda.

- Come sarà il grafico della funzione di equazione $y = \sqrt{x} - 1$? Il risultato è mostrato in FIGURA 9. Osserviamo che il grafico di $y = \sqrt{x} - 1$ si ottiene traslando verso il basso di un'unità quello di $y = \sqrt{x}$.

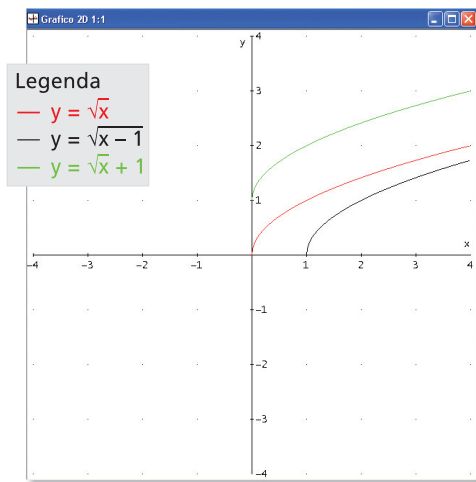


FIGURA 8

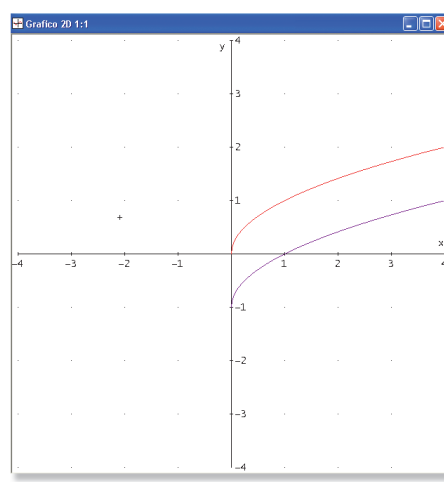


FIGURA 9

I grafici delle funzioni del tipo $y = \sqrt[n]{x}$ con n numero naturale pari e diverso da zero sono contenuti nel primo quadrante perché $\sqrt[n]{x}$ con n pari esiste se $x \geq 0$ e il corrispondente valore di $y = \sqrt[n]{x}$ è anch'esso maggiore o uguale a zero.

Proviamo ora a tracciare il grafico di una funzione contenente una radice di *indice dispari*. Consideriamo per esempio la funzione di equazione $y = \sqrt[5]{x}$. Scriviamo nella casella di inserimento $x^{(1/5)}$ e confermiamo con *Invio*. Quindi passiamo alla finestra grafica, facciamo clic sul pulsante e otteniamo il grafico della funzione (FIGURA 10). Osserviamo che anche in questo caso il grafico è contenuto nel primo quadrante. Sappiamo però che $\sqrt[n]{x}$, per n dispari, è definita anche per $x < 0$. Per ottenere anche la parte mancante del grafico apriamo il menu *Opzioni* e scegliamo la voce *Modalità*. Nella finestra di dialogo che compare in corrispondenza di *Radici complesse* selezioniamo l'opzione *Real* e confermiamo con *OK*. Nella finestra di *Derive* compare la scritta **Branch:=Real**.

Se ora tracciamo nuovamente il grafico di $y = \sqrt[5]{x}$ vediamo che ora esso occupa sia il primo che il terzo quadrante, come mostrato in FIGURA 11.

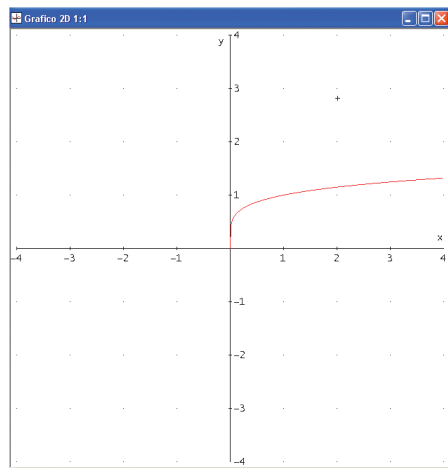


FIGURA 10

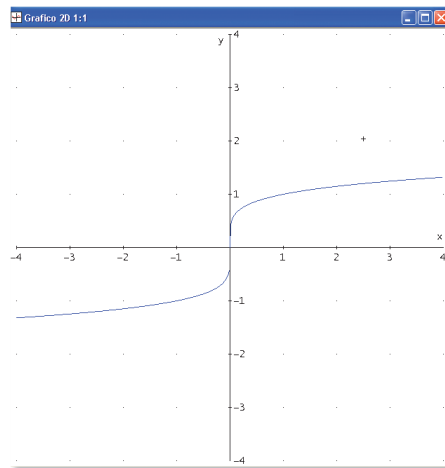


FIGURA 11